Il filtro RLC

Scopo dell'esperimento

Determinare la banda passante di un circuito RLC progettato per filtrare segnali sinusoidali.

Richiamo teorico

In un circuito a corrente alternata la tensione (V) e la corrente (i) sono legate dalla legge di Ohm generalizzata

$$V = Z\,i$$

dove $V = V_0 \sin(\omega t)$ è la tensione sinusoidale avente ampiezza V_0 e frequenza $f = \omega/2\pi f$, Z è l'*impedenza* del circuito, che per i diversi componenti può essere espressa mediante i seguenti numeri complessi (vedi appendice):

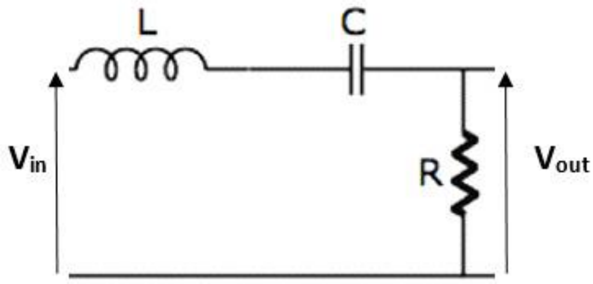
$$Z_R = R \text{ (\textit{impedenza} di una resistenza R)}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \text{ (\textit{reattanza capacitiva} di una capacità C)}$$

$$Z_L = j\omega L \text{ (\textit{reattanza induttiva} di un'induttanza L)}$$

Un ***filtro passa-banda*** è un circuito progettato per lasciare passare i segnali elettrici con frequenze comprese in una banda $[f_1 ; f_2]$.

Esso può essere realizzato alimentando un circuito RLC con una tensione di ingresso sinusoidale (V_{in} = segnale d'ingresso) e prendendo il segnale di uscita (V_{out} = segnale filtrato) ai capi del resistore (vedi figura a fianco).



Queste sono le espressioni per le tensioni:

$$V_{in} = V_0 \sin(\omega t)$$

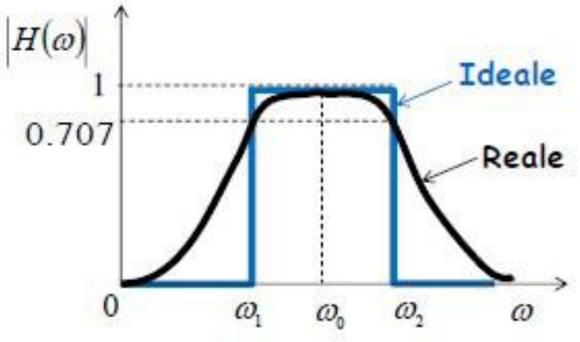
$$V_{in} = Z\,i = (Z_R + Z_L + Z_C)\,i = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) i \text{ ; } V_{out} = R\,i$$

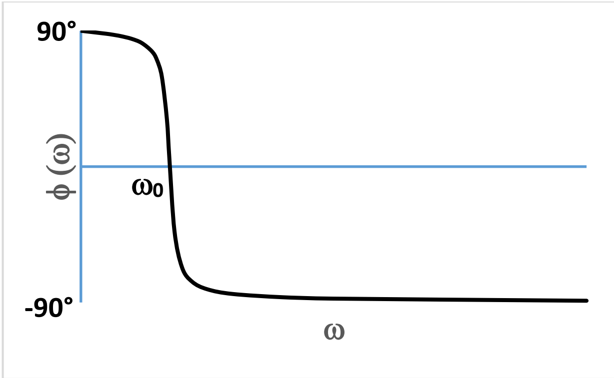
Si può quindi calcolare la funzione di trasferimento $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R^2 - jR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

L'ampiezza della funzione di trasferimento, cioè il modulo $|H(\omega)|$, e la sua fase ϕ sono espressi dalle seguenti relazioni:

$$|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega})| = \frac{\boldsymbol{R}}{\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{ ; } \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{tan}^{-1}\left(-\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\boldsymbol{R}}\right)$$

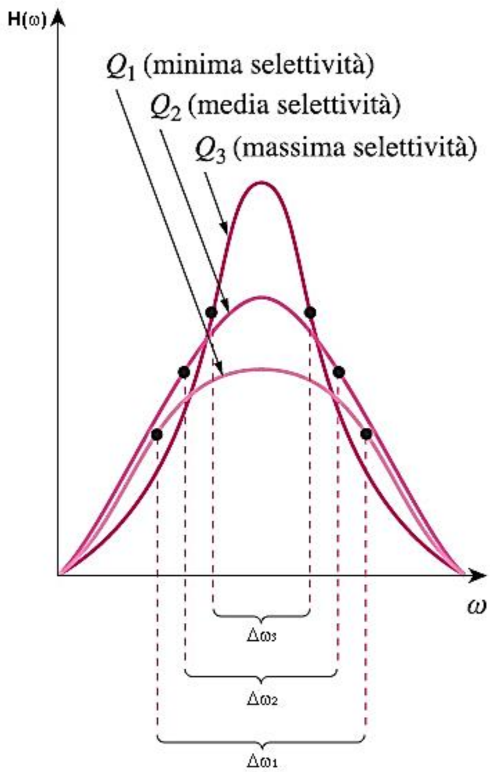




Dai grafici preedenti si deduce che $f_0 = \frac{\boldsymbol{\omega_0}}{\boldsymbol{2\pi}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi\sqrt{LC}}}$ è la frequenza di centro banda del circuito, che corrisponde alla **frequenza di risonanza**:

- per $\omega = \boldsymbol{\omega_0} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{LC}}}$ → **condizione di risonanza** → H = 1 (ampiezza massima → $V_{out} = V_{in}$) e $\phi = 0$
- Per $\omega_1 = \frac{-R+\sqrt{R^2+4L/C}}{2L}$ e $\omega_2 = \frac{R+\sqrt{R^2+4L/C}}{2L}$ → $|H(\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71 \rightarrow V_{out} = 71\%\, V_{in}$
- Per convenzione si definisce **banda passante del filtro** l'intervallo di frequenze $[f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi};\ f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}]$, in cui il **segnale in uscita ha un valore maggiore del 71% rispetto a quello in ingresso** →$|H(\omega)| > 0{,}71$.
- La larghezza della banda passante è espressa dalla relazione $\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L}$
- Un fattore importante del circuito risonante RLC è il cosiddetto **fattore di qualità Q** che ci dice **quanto è stretta la banda passante**. Questo è definito dalla relazione seguente:

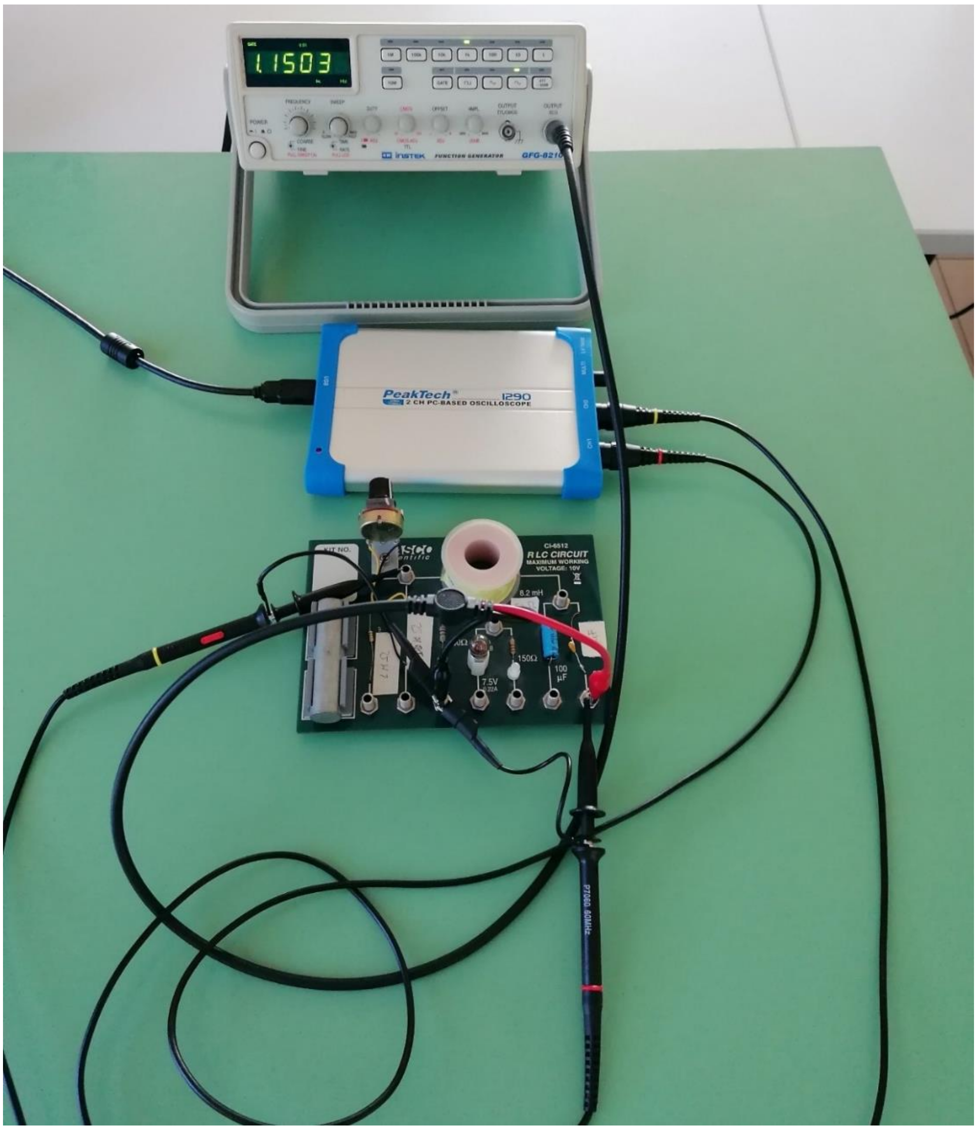
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Più è alto il fattore di qualità più selettivo è il filtro perché più è stretta la banda di frequenze che vengono fatte passare (vedi figura a fianco in cui si ha $Q_3 > Q_2 > Q_1$)

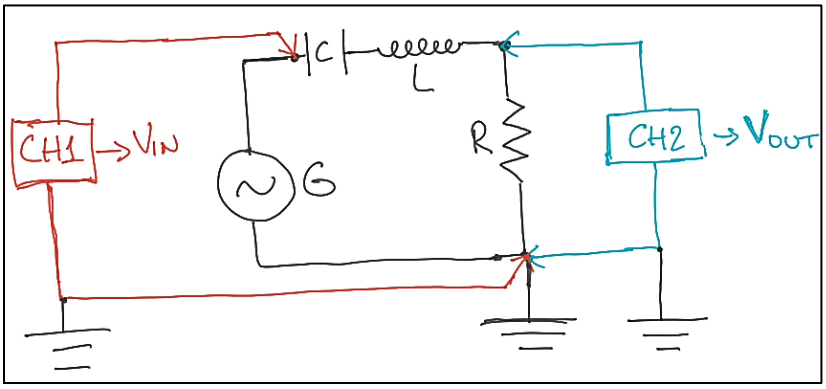
Materiali e strumenti

- Scheda elettronica RLC (R = 100 Ω ; L = 8,2 mH ; C = 10 nF)
- Generatore di segnali sinusoidali
- Oscilloscopio digitale Peaktech
- Cavi di collegamento
- Software di analisi Dati (Excel, SciDavis)

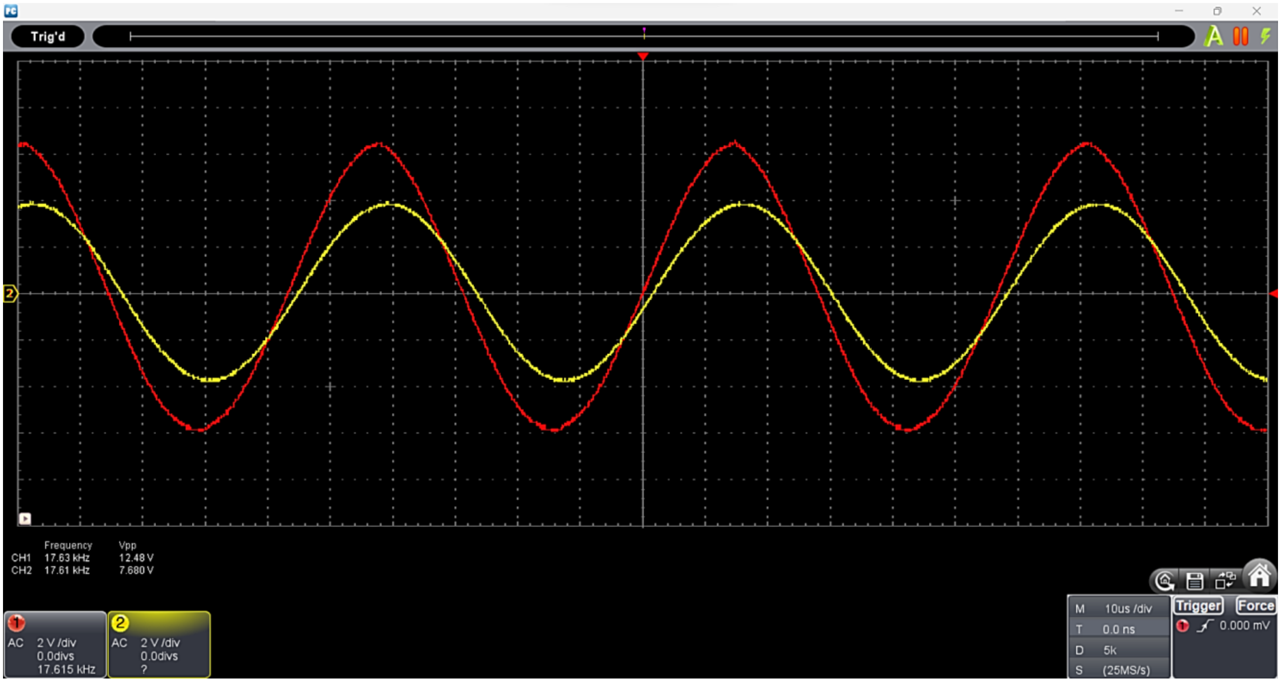


Procedimento sperimentale ed analisi dati

- Collegare il generatore sinusoidale (G) al circuito RLC (R = 100 Ω ; L = 8,2 mH ; C = 10 nF), poi collegare la sonda del canale 1 dell'oscilloscopio (CH1) in parallelo al generatore per misurare il segnale in ingresso V_{in}, infine collegare la sonda del canale 2 (CH2) in parallelo al resistore per misurare il segnale filtrato V_{out}, facendo in modo che le masse delle sonde dell'oscilloscopio e del generatore (i connettori di colore nero) siano collegate insieme (vedi figura a fianco).



- Accendere il generatore, selezionare la forma d'onda sinusoidale, impostare una frequenza vicino al valore teorico $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \mathbf{17,6\ kHz}$ e regolare al 50% circa l'ampiezza del segnale.
- Collegare l'oscilloscopio al computer tramite il cavo USB e aprire il software Peaktech.
- Settare la stessa scala verticale (V/div) per i due segnali e sovrapporli resettando a zero la posizione di punto zero e impostando il trigger in modalità "*Single*" sul canale 1 → "*Source CH1*" (vedi figura seguente).

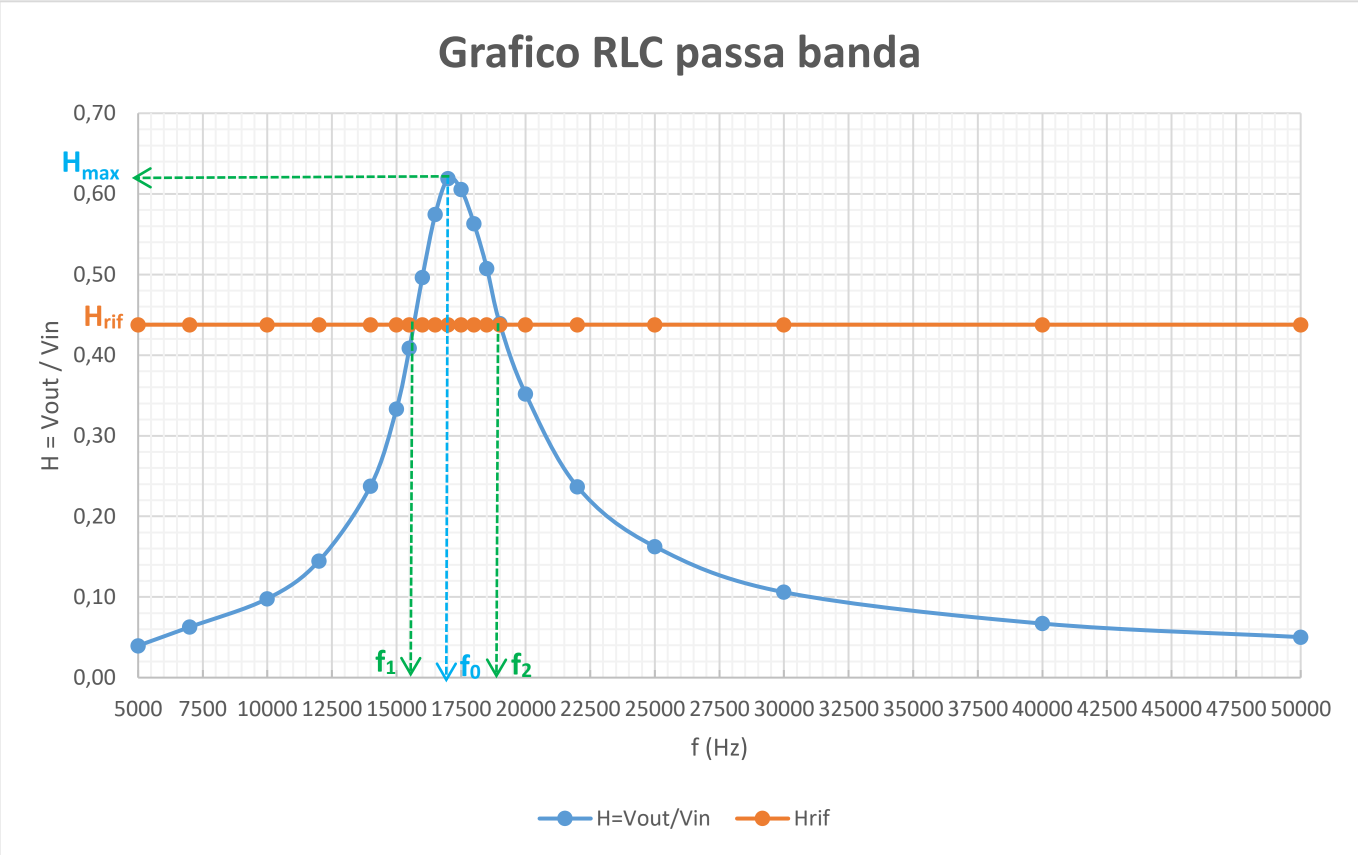


- Sotto il grafico a sinistra compaiono i valori della tensione picco-picco (Vpp) e della frequenza dei due segnali (se non appaiono, cliccate sul canale, poi sulle impostazioni e selezionare *frequency* e *Vpp*)
- Mediante il generatore variare la frequenza nel range [5 kHz ; 50 kHz], variando se necessario la scala verticale delle tensioni (Volt/div) e quella orizzontale dei tempi (s/Div) in modo da visualizzare bene le forme d'onda, e annotare in una tabella per ciascuna frequenza i valori Vpp dei due canali misurati dall'oscilloscopio. Come esempio potete far riferimento ai seguenti valori di frequenza (fare piccoli step intorno al valore teorico f_0 = 17,6 kHz):

f (Hz)	Vpp IN (V)	Vpp OUT (V)	H=Vout/Vin
5000			
7000			
10000			
12000			
14000			
15000			
15500			
16000			
16500			
17000			
17500			
18000			
18500			
19000			
20000			
22000			
25000			
30000			
40000			
50000			

- Mediante Excel calcolare la funzione di trasferimento H = V_{out} / V_{in} e fare il grafico di H in funzione della frequenza, aggiungendo anche la retta di riferimento $H_{rif} = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ (vedi figura sotto).
- $H_{max} < 1$ a causa della resistenza parassita dell'induttore (R_L):

$$H(\omega) = \frac{R}{R + R_L + j\left(\omega_L - \frac{1}{\omega_C}\right)} \rightarrow H_{max} = \frac{R}{R + R_L} < 1 \; per \; \omega = \omega_0$$



- Impostare in modo opportuno la scala sull'asse orizzontale, determinare graficamente i valori sperimentali delle frequenze della banda passante [f_1 ; f_2], il valore di H_{max} corrispondente alla frequenza di risonanza fo con le rispettive incertezze di misura (vedi figura precedente).

Conclusioni

- Determinare il valore sperimentale della banda passante $\Delta f_{sp} = f_2 - f_2$ ed inviarlo via mail al prof. Euro Sampaolesi
- Invertendo la relazione $H_{max} = \frac{R}{R+R_L}$ determinare il valore della resistenza parassita dell'induttore:

$$R_L = \frac{R(1 - H_{max})}{H_{max}}$$

- Calcolare il valore teorico $\Delta f = \frac{1}{2\pi}\frac{(R+R_L)}{L}$ e confrontarlo col valore sperimentale Δf_{sp} entro le incertezze di misura.

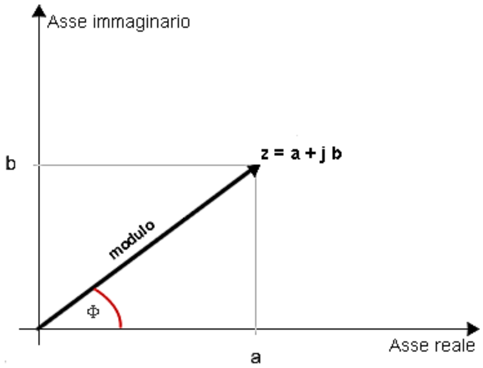
APPENDICE

Numeri complessi

Nella rappresentazione cartesiana un numero complesso z può essere espresso nella formula:

z = a + j b

dove $a = |z|cos(\phi)$ è la sua parte reale , $b = |z|sin(\phi)$ è la sua parte immaginaria e j è l'unità immaginaria → $j^2 = -1$
Il modulo del numero complesso è $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
La sua fase (argomento) è $\phi = tan^{-1}(^b/_a)$



Mediante l'identità di Eulero:

$$e^{j\Phi} = cos(\Phi) + j\ sin(\Phi)$$

un numero complesso può anche essere scritto in forma esponenziale:

$$z = |z|(cos\phi + jsin\phi) = |z|e^{j\Phi}$$

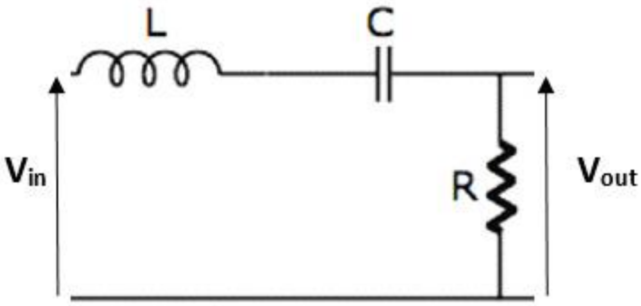
Analisi del circuito RLC mediante i numeri complessi (fasori)

La tensione sinusoidale di ingresso fornita dal generatore $V_{in} = V_0 \sin(\omega t)$ può essere scritta mediante il numero complesso (fasore):

$$V_{in} = V_0 e^{j\omega t}$$

La corrente sinusoidale che passa nel circuito $i = i_0 \sin(\omega t + \phi)$ può essere scritta mediante il numero complesso (fasore):

$$i = i_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$



La seconda legge di Kirchhoff per il circuito RLC è espressa dall'equazione:

$$V_{in} = V_R + V_L + V_C = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo e ricordando la relazione $i = \frac{dQ}{dt}$ si ottiene l'equazione:

$$\frac{dV_{in}}{dt} = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}i$$

Sostituendo i fasori $V_{in} = V_0 e^{j\omega t}$ $i = i_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ nell'equazione suddetta si ottiene:

$$j\omega\, V_{in} = Rj\omega\, i - \omega^2 L\, i + \frac{1}{C}i \rightarrow V_{in} = \left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right] i$$

Ricordando la legge di Ohm generalizzata che lega tensione e corrente:

$$V_{in} = Z\, i = (Z_R + Z_L + Z_C)\, i$$

si possono ricavare i valori delle impedenze e delle reattanze:

$Z_R = R$ (*impedenza* di una resistenza R)

$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ (*reattanza capacitiva* di una capacità C)

$Z_L = j\omega L$ (*reattanza induttiva* di un'induttanza L)