

Circuiti R-L-C per filtrare segnali sinusoidali

Scopo dell'esperimento

Analizzare il funzionamento di circuiti R-L-C progettati per filtrare segnali sinusoidali.

Richiamo teorico

In un circuito a corrente alternata la tensione (V) e la corrente (i) sono legate dalla legge di Ohm generalizzata

$$V = Z i$$

dove $V = V_0 \sin(\omega t)$ è la tensione sinusoidale avente ampiezza V_0 e frequenza $f = \omega/2\pi$, Z è l'impedenza del circuito, che per i diversi componenti può essere espressa mediante i seguenti numeri complessi (vedi appendice):

$$Z_R = R \text{ (impedenza di una resistenza R)}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \text{ (reattanza capacitiva di una capacità C)}$$

$$Z_L = j\omega L \text{ (reattanza induttiva di un'induttanza L)}$$

Un **filtro passa-alto** è un circuito progettato per lasciare passare i segnali elettrici con frequenze maggiori rispetto ad una certa frequenza di taglio f_0 .

Esso può essere realizzato alimentando un circuito RL con una tensione di ingresso sinusoidale (V_{in} = segnale d'ingresso) e prendendo il segnale di uscita (V_{out} = segnale filtrato) ai capi dell'induttore (vedi figura a fianco).

Queste sono le espressioni per le tensioni:

$$V_{in} = V_0 \sin(\omega t)$$

$$V_{in} = Z i = (Z_R + Z_L) i = (R + j\omega L) i ; V_{out} = Z_L i = j\omega L i$$

Si può quindi calcolare la funzione di trasferimento $H(\omega)$:

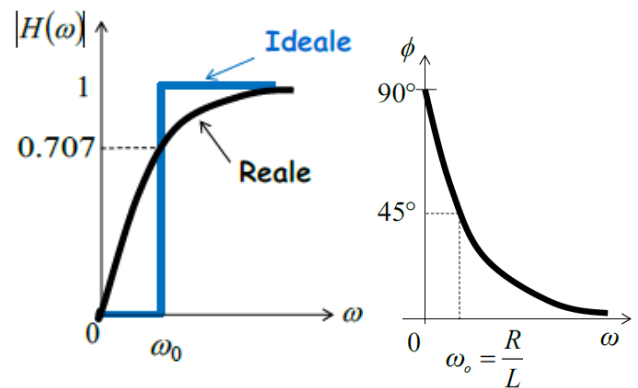
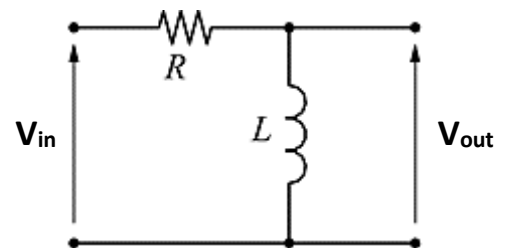
$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R} = \frac{(\omega L/R)^2 + j\omega L/R}{1 + (\omega L/R)^2}$$

Il modulo $|H(\omega)|$, cioè l'ampiezza della funzione di trasferimento e la sua fase ϕ sono:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} ; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

dove $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$ è la **frequenza di taglio del circuito**

- per $\omega = \omega_0 = \frac{R}{L} \rightarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ e $\phi = 45^\circ$
- per $\omega \ll \omega_0 \rightarrow |H(\omega)| \approx 0 \rightarrow$ vengono attenuati i segnali con frequenze basse rispetto a f_0
- per $\omega \gg \omega_0 \rightarrow |H(\omega)| \approx 1 \rightarrow$ **passano i segnali con frequenza alte rispetto a f_0**



Un **filtro passa-basso** è un circuito progettato per lasciare passare i segnali elettrici con frequenze minori rispetto ad una certa frequenza di taglio f_0 .

Esso può essere realizzato alimentando un circuito RC con una tensione di ingresso sinusoidale (V_{in} = segnale d'ingresso) e prendendo il segnale di uscita (V_{out} = segnale filtrato) ai capi del condensatore (vedi figura a fianco).

Queste sono le espressioni per le tensioni:

$$V_{in} = V_0 \sin(\omega t)$$

$$V_{in} = Z i = (Z_R + Z_C) i = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) i ; V_{out} = Z_C i = \frac{1}{j\omega C} i$$

Si può quindi calcolare la funzione di trasferimento $H(\omega)$:

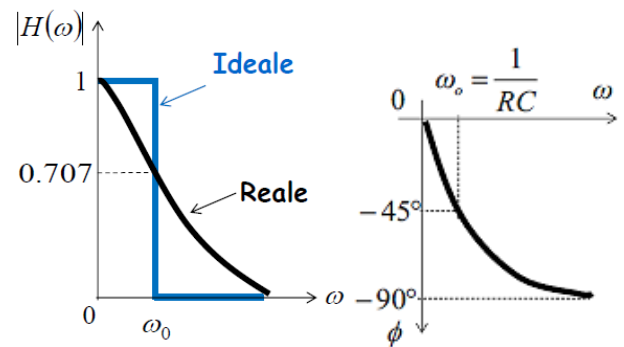
$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

Il modulo $|H(\omega)|$, cioè l'ampiezza della funzione di trasferimento, e la sua fase ϕ sono:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} ; \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

dove $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$ è la **frequenza di taglio**

- per $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC} \rightarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ e $\phi = -45^\circ$
- per $\omega \ll \omega_0 \rightarrow |H(\omega)| \approx 1 \rightarrow$ **passano i segnali con frequenze basse rispetto a f_0**
- per $\omega \gg \omega_0 \rightarrow |H(\omega)| \approx 0 \rightarrow$ vengono attenuati i segnali con frequenze alte rispetto a f_0



Un **filtro passa-banda** è un circuito progettato per lasciare passare i segnali elettrici con frequenze comprese in una banda $[f_1; f_2]$.

Esso può essere realizzato alimentando un circuito RLC con una tensione di ingresso sinusoidale (V_{in} = segnale d'ingresso) e prendendo il segnale di uscita (V_{out} = segnale filtrato) ai capi del resistore (vedi figura a fianco).

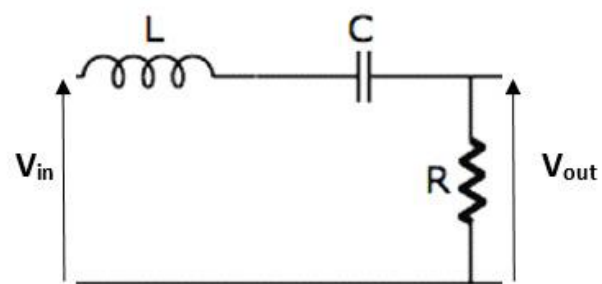
Queste sono le espressioni per le tensioni:

$$V_{in} = V_0 \sin(\omega t)$$

$$V_{in} = Z i = (Z_R + Z_L + Z_C) i = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) i ; V_{out} = R i$$

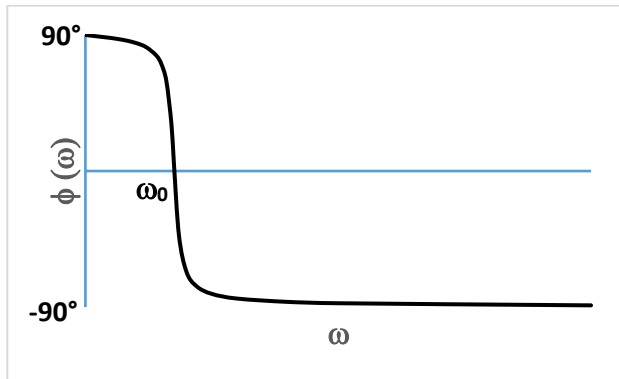
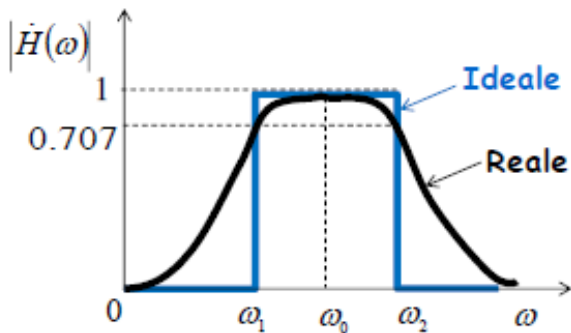
Si può quindi calcolare la funzione di trasferimento $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R^2 - jR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



Il modulo $|H(\omega)|$, cioè l'ampiezza della funzione di trasferimento e la sua fase ϕ sono:

$$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right)$$



dove $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ è la frequenza di centro banda del circuito, che corrisponde alla **frequenza di risonanza**:

- per $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow$ **condizione di risonanza** $\rightarrow H = 1$ (ampiezza massima) e $\phi = 0$
- per $\omega = \omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L}$ e $\omega = \omega_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L} \rightarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$
- per $\omega_1 < \omega < \omega_2 \rightarrow |H(\omega)| \approx 1 \rightarrow$ **passano i segnali con frequenze comprese nella banda** definita dall'intervallo $[f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}; f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}]$.
- per $\omega < \omega_1$ e $\omega > \omega_2 \rightarrow |H(\omega)| \approx 0$ vengono attenuati i segnali con frequenze esterne alla banda.

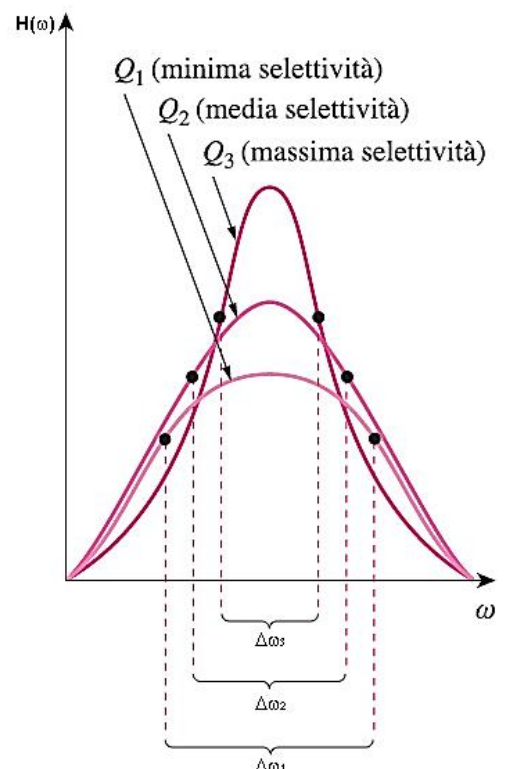
La larghezza della banda passante $\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$ indica l'intervallo di frequenze che il filtro lascia passare; un fattore importante del circuito risonante RLC è il cosiddetto **fattore di qualità Q** che ci dice **quanto è stretta la banda passante**. Questo è definito dalla relazione seguente:

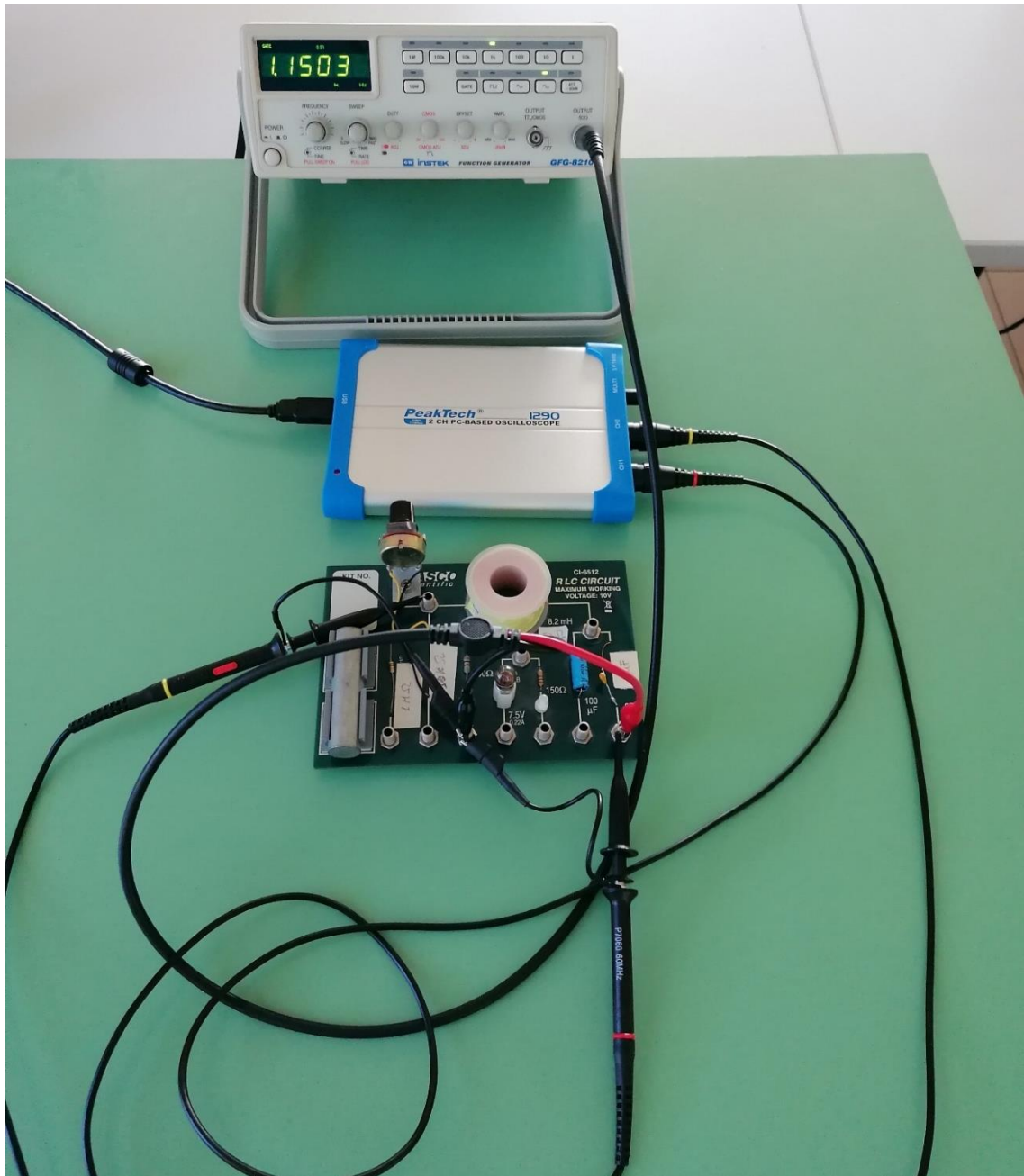
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Più è alto il fattore di qualità più selettivo è il filtro perché più è stretta la banda di frequenze che vengono fatte passare (vedi figura a fianco in cui si ha $Q_3 > Q_2 > Q_1$)

Materiali e strumenti

- Scheda elettronica RLC ($R = 100 \Omega$; $L = 8,2 \text{ mH}$; $C = 10 \text{ nF}$)
- Generatore di segnali sinusoidali
- Oscilloscopio digitale Peaktech
- Cavi di collegamento
- Software di analisi Dati (Excel, SciDavis)

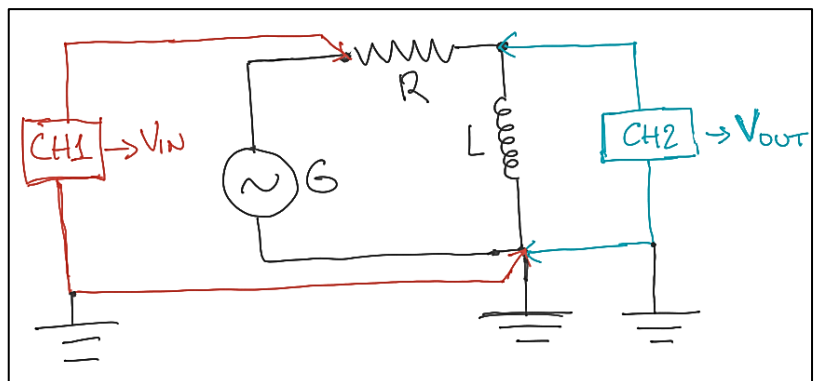




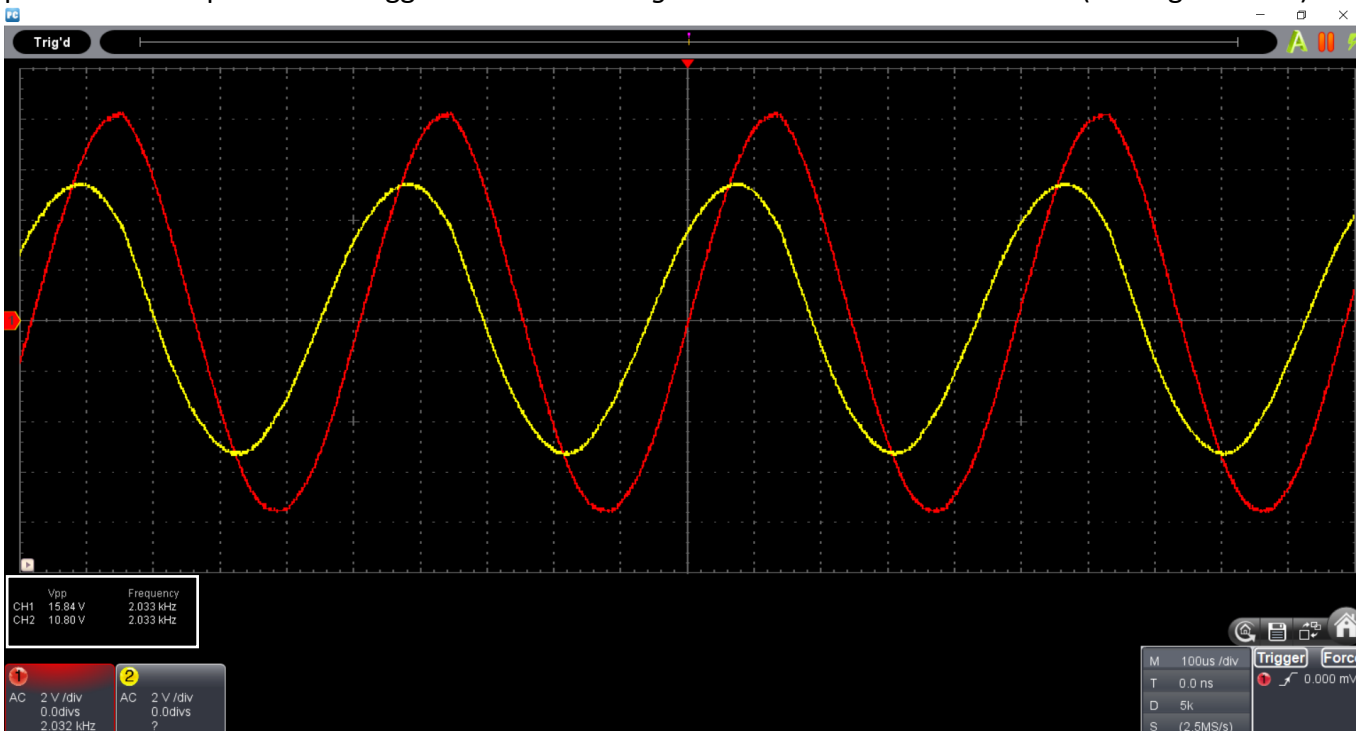
Procedimento sperimentale ed analisi dati

1. Filtro RL passa -alto

- Collegare il generatore sinusoidale (G) al circuito RL ($R = 100 \Omega$; $L = 8,2 \text{ mH}$), poi collegare la sonda del canale 1 dell'oscilloscopio (CH1) in parallelo al generatore per misurare il segnale in ingresso V_{in} , infine collegare la sonda del canale 2 (CH2) in parallelo all'induttore per misurare il segnale filtrato V_{out} . Fare in modo che le masse delle sonde dell'oscilloscopio e del generatore (i connettori di colore nero) siano collegate insieme (vedi figura a fianco).



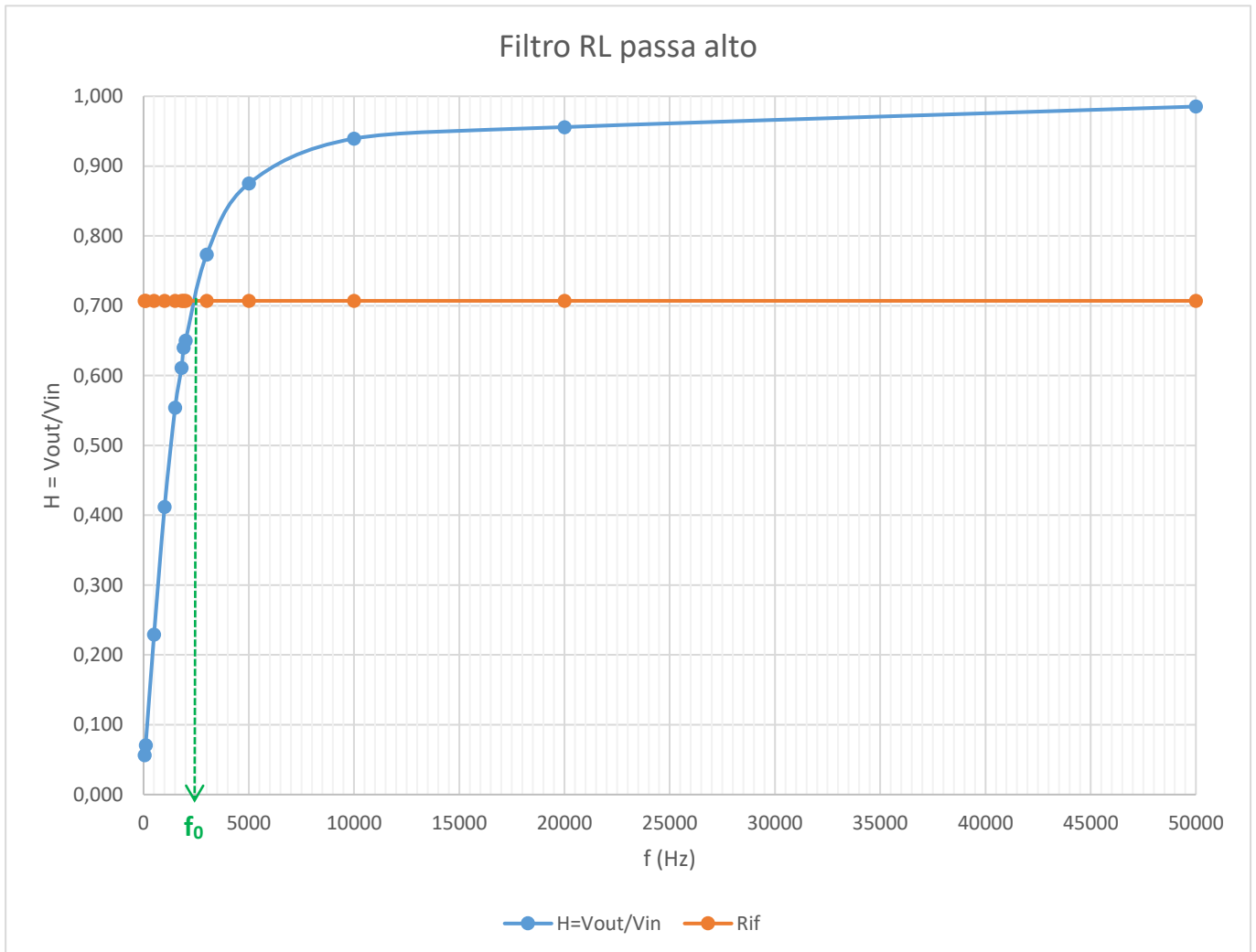
- Accendere il generatore, selezionare la forma d'onda sinusoidale, impostare una frequenza vicino al valore teorico $f_0 = \frac{R}{2\pi L} = 1,94 \text{ kHz}$ e regolare al 50% circa l'ampiezza del segnale.
- Collegare l'oscilloscopio al computer tramite il cavo USB e aprire il software Peaktech
- Settare la stessa scala verticale (V/div) per i due segnali e sovrapporli resettando a zero la posizione di punto zero e impostando il trigger in modalità "Single" sul canale 1 → "Source CH1" (vedi figura sotto).



- Sotto il grafico a sinistra compaiono i valori della tensione picco-picco (Vpp) e della frequenza dei due segnali (se non appaiono cliccare sul numero del canale, poi sulle impostazioni selezionare *frequency* e *Vpp*)
- Mediante il generatore variare la frequenza nel range [50 Hz ; 50000 Hz], cambiando se necessario la scala verticale delle tensioni (Volt/div) e quella orizzontale dei tempi (s/Div) in modo da visualizzare bene le forme d'onda, e annotare in una tabella per ciascuna frequenza i valori Vpp dei due canali misurati dall'oscilloscopio. Come esempio potete far riferimento ai seguenti valori di frequenza (fare piccoli step intorno al valore teorico $f_0 = 1,94 \text{ kHz}$):

f (Hz)	Vpp IN (V)	Vpp OUT (V)	H=Vout/Vin
50			
100			
500			
1000			
1500			
1800			
1900			
2000			
3000			
5000			
10000			
20000			
50000			

- Mediante Excel calcolare la funzione di trasferimento $H = V_{out} / V_{in}$ e fare il grafico di H in funzione della frequenza, aggiungendo anche la retta di riferimento $H_{rif} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (vedi figura sotto).

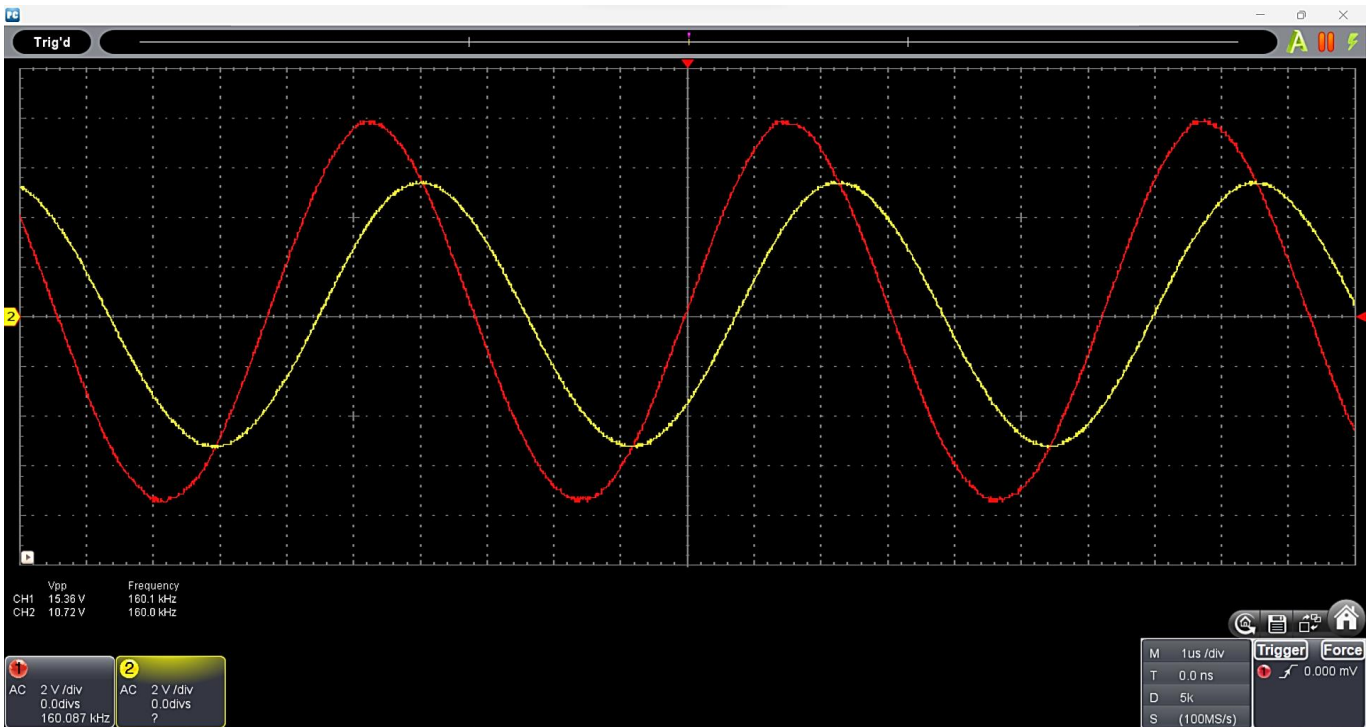


- Determinare graficamente il valore sperimentale frequenza di taglio f_0 (vedi figura precedente).

2. Filtro RC passa-basso

- Collegare il generatore sinusoidale (G) al circuito RC ($R = 100 \Omega$; $C = 10 \text{ nF}$), poi collegare la sonda del canale 1 dell'oscilloscopio (CH1) in parallelo al generatore per misurare il segnale in ingresso V_{in} , infine collegare la sonda del canale 2 (CH2) in parallelo al condensatore per misurare il segnale filtrato V_{out} . Fare in modo che le masse delle sonde dell'oscilloscopio e del generatore (i connettori di colore nero) siano collegate insieme (vedi figura a fianco).
-
- Accendere il generatore, selezionare la forma d'onda sinusoidale, impostare una frequenza vicino al valore teorico $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 1,59 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ e regolare al 50% circa l'ampiezza del segnale.

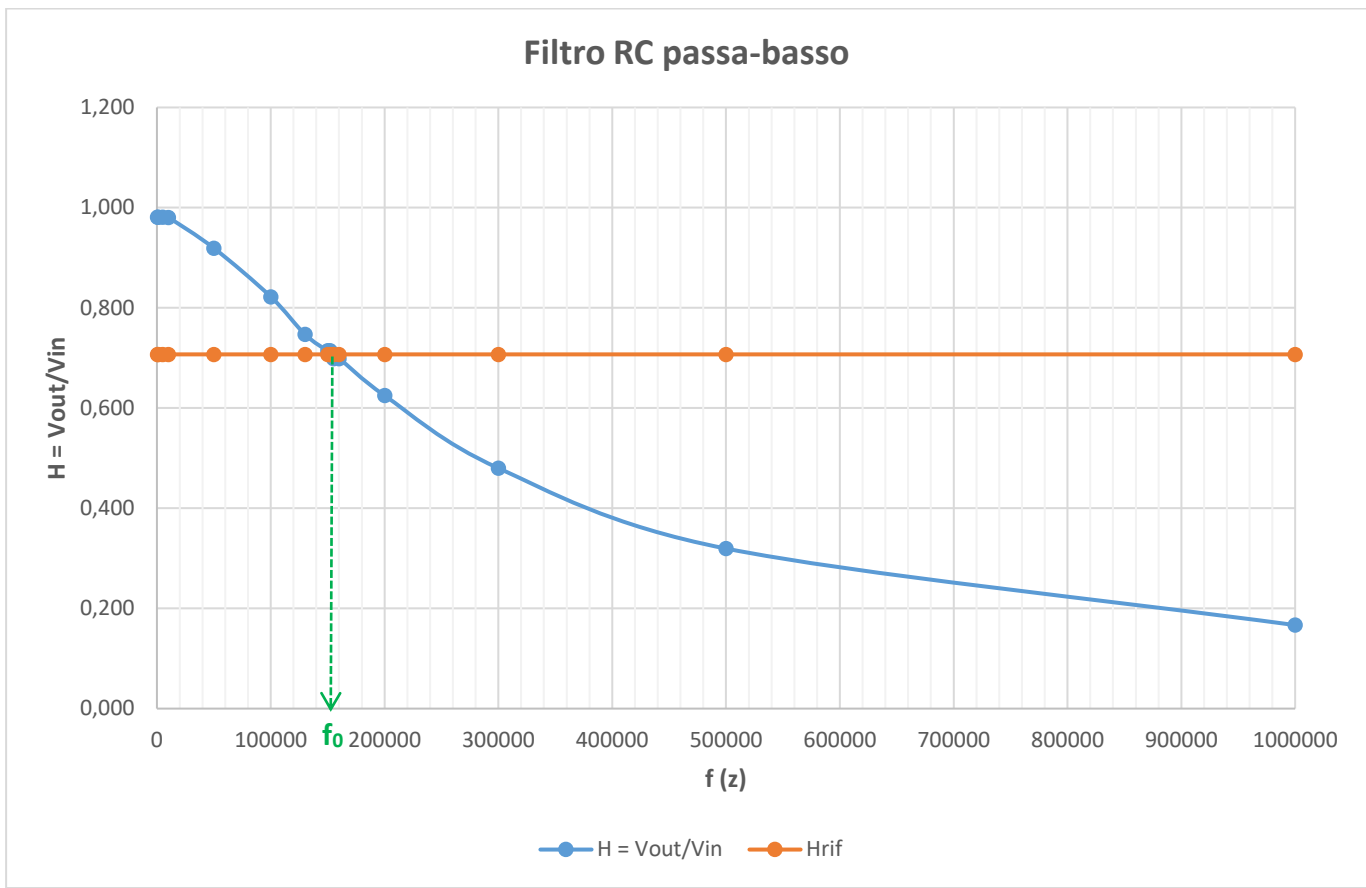
- Collegare l'oscilloscopio al computer tramite il cavo USB e aprire il software Peaktech
- Settare la stessa scala verticale (V/div) per i due segnali e sovrapporli resettando a zero la posizione di punto zero e impostando il trigger in modalità "Single" sul canale 1 → "Source CH1" (vedi figura sotto).



- Sotto il grafico a sinistra compaiono i valori della tensione picco-picco (Vpp) e della frequenza dei due segnali (se non appaiono, cliccate sul canale, poi sulle impostazioni e selezionare *frequency* e *Vpp*)
- Mediante il generatore variare la frequenza nel range [500 Hz ; 1 MHz], cambiando se necessario la scala verticale delle tensioni (Volt/div) e quella orizzontale dei tempi (s/Div) in modo da visualizzare bene le forme d'onda, e annotare in una tabella per ciascuna frequenza i valori Vpp dei due canali misurati dall'oscilloscopio. Come esempio potete far riferimento ai seguenti valori di frequenza (fare piccoli step intorno al valore teorico $f_0 = 1,59 \cdot 10^5$ Hz):

f (Hz)	Vpp IN (V)	Vpp OUT (V)	H = Vout/Vin
500			
1000			
5000			
10000			
50000			
100000			
130000			
150000			
152000			
155000			
160000			
200000			
300000			
500000			
1000000			

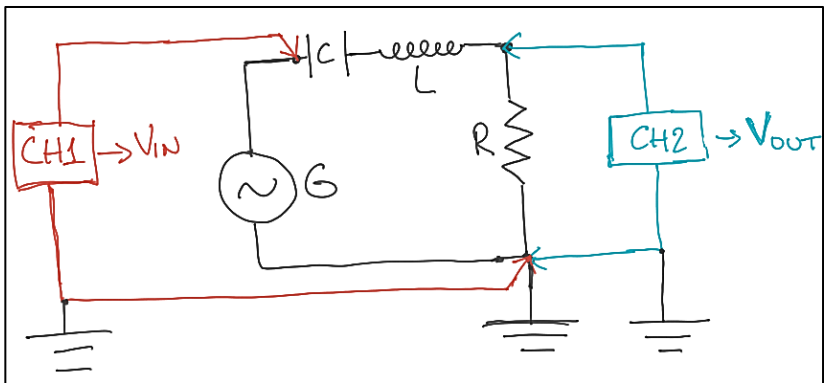
- Mediante Excel calcolare la funzione di trasferimento $H = V_{out} / V_{in}$ e fare il grafico di H in funzione della frequenza, aggiungendo anche la retta di riferimento $H_{rif} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (vedi figura sotto).



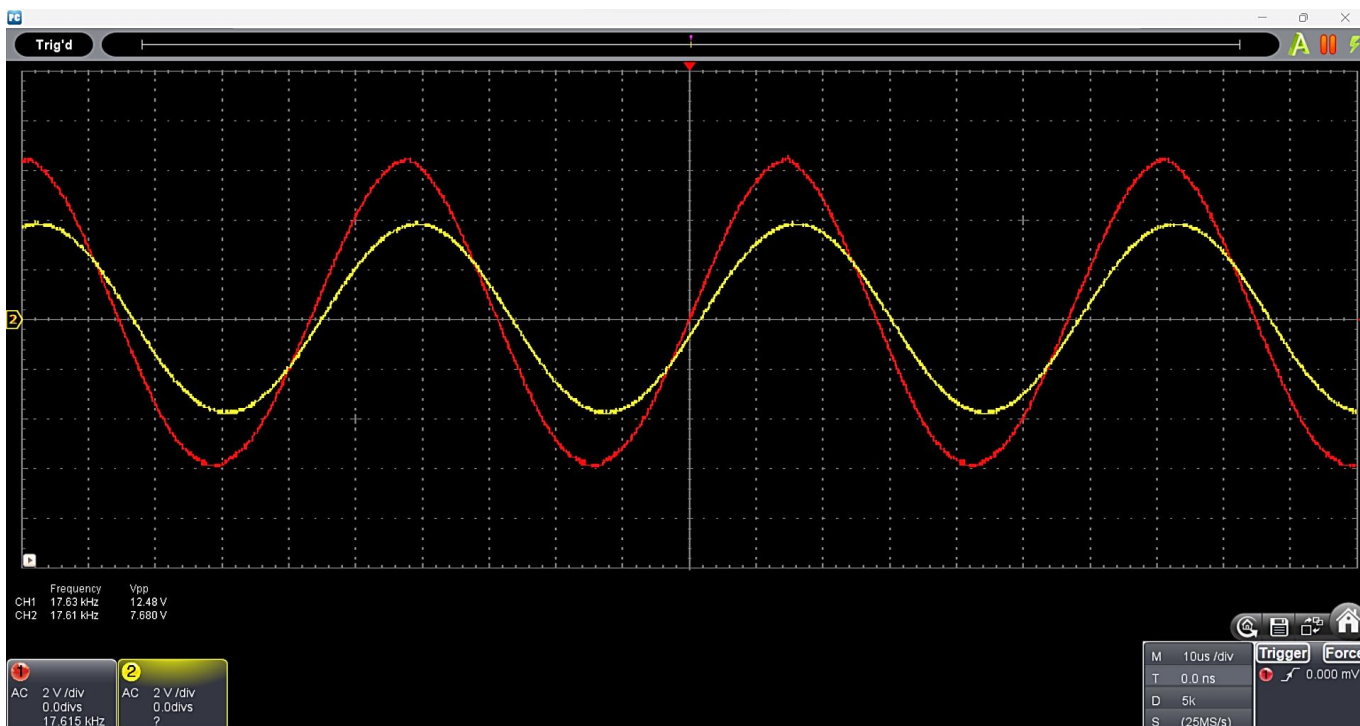
- Determinare graficamente il valore sperimentale frequenza di taglio f_0 (vedi figura precedente).

Filtro RLC passa-banda

- Collegare il generatore sinusoidale (G) al circuito RLC ($R = 100 \Omega$; $L = 8,2 \text{ mH}$; $C = 10 \text{ nF}$), poi collegare la sonda del canale 1 dell'oscilloscopio (CH1) in parallelo al generatore per misurare il segnale in ingresso V_{in} , infine collegare la sonda del canale 2 (CH2) in parallelo al resistore per misurare il segnale filtrato V_{out} , facendo in modo che le masse delle sonde dell'oscilloscopio e del generatore (i connettori di colore nero) siano collegate insieme (vedi figura a fianco).



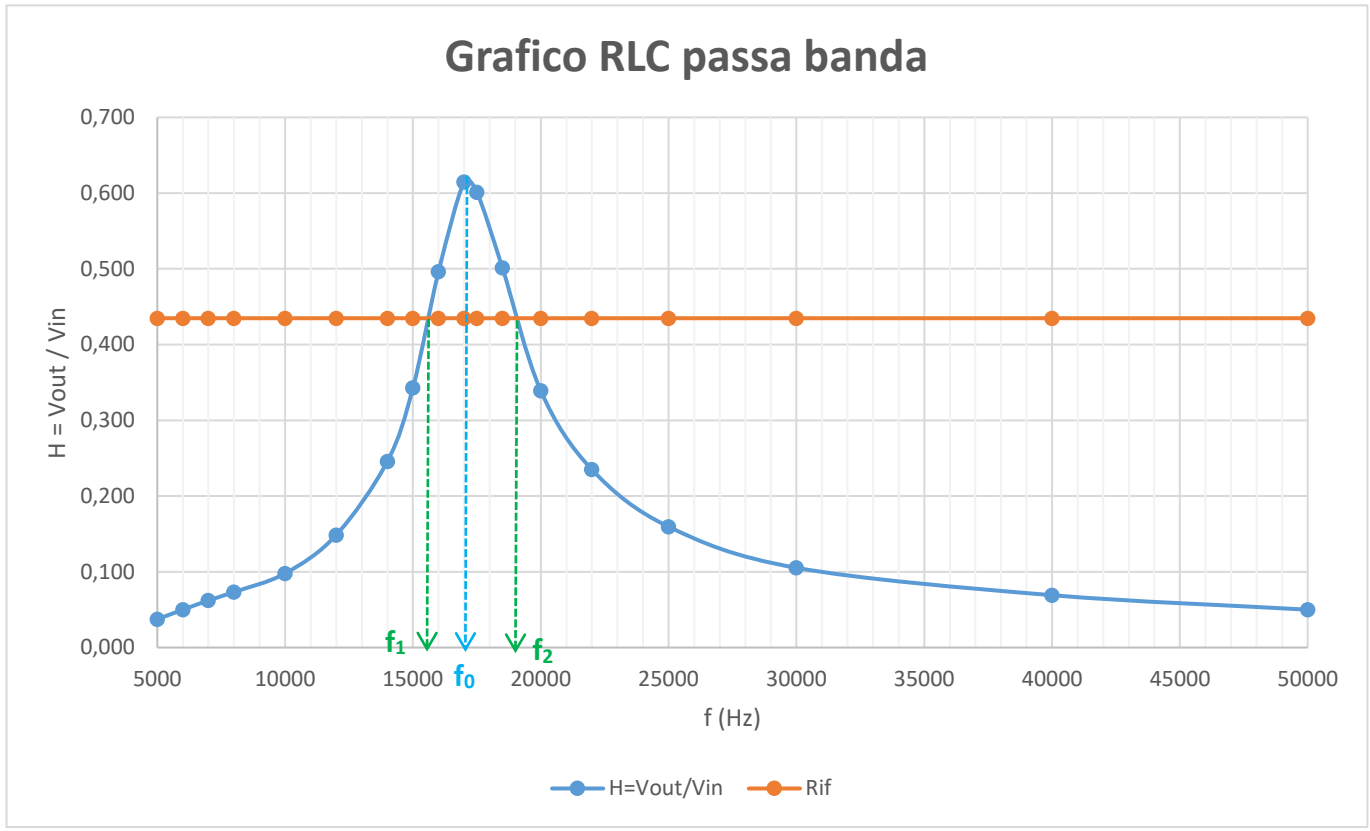
- Accendere il generatore, selezionare la forma d'onda sinusoidale, impostare una frequenza vicino al valore teorico $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 17,6 \text{ kHz}$ e regolare al 50% circa l'ampiezza del segnale.
- Collegare l'oscilloscopio al computer tramite il cavo USB e aprire il software Peaktech
- Settare la stessa scala verticale (V/div) per i due segnali e sovrapporli resettando a zero la posizione di punto zero e impostando il trigger in modalità "Single" sul canale 1 → "Source CH1" (vedi figura sotto).



- Sotto il grafico a sinistra compaiono i valori della tensione picco-picco (V_{pp}) e della frequenza dei due segnali (se non appaiono, cliccate sul canale, poi sulle impostazioni e selezionare *frequency* e V_{pp})
- Mediante il generatore variare la frequenza nel range [5 kHz ; 50 kHz], variando se necessario la scala verticale delle tensioni (Volt/div) e quella orizzontale dei tempi (s/Div) in modo da visualizzare bene le forme d'onda, e annotare in una tabella per ciascuna frequenza i valori V_{pp} dei due canali misurati dall'oscilloscopio. Come esempio potete far riferimento ai seguenti valori di frequenza (fare piccoli step intorno al valore teorico $f_0 = 17,6 \text{ kHz}$):

f (Hz)	Vpp IN (V)	Vpp OUT (V)	H=Vout/Vin
5000			
6000			
7000			
8000			
10000			
12000			
14000			
15000			
16000			
17000			
17500			
18500			
20000			
22000			
25000			
30000			
40000			
50000			

- Mediante Excel calcolare la funzione di trasferimento $H = V_{out} / V_{in}$ e fare il grafico di H in funzione della frequenza, aggiungendo anche la retta di riferimento $H_{rif} = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ (vedi figura sotto)¹.



- Determinare graficamente i valori sperimentali delle frequenze della banda passante [f_1 ; f_2] e il valore della frequenza di risonanza f_0 (vedi figura precedente).

Conclusioni

- Per il filtro RL passa-alto confrontare il valore sperimentale della frequenza di taglio con quello teorico $f_0 = \frac{R}{2\pi L}$ e verificare che la curva sperimentale della funzione di trasferimento tende a zero per valori di frequenza $f \ll f_0$ e si avvicina ad 1 per frequenze $f \gg f_0$.
- Per il filtro RC passa-basso confrontare il valore sperimentale della frequenza di taglio con quello teorico $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ e verificare che la curva sperimentale della funzione di trasferimento tende a 1 per valori di frequenza $f \ll f_0$ e si avvicina a zero per frequenze $f \gg f_0$.
- Per il filtro RLC passa-banda determinare il fattore di qualità del filtro (mediante le frequenze della banda passante e quella di risonanza $\rightarrow Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$) e confrontarlo col valore teorico; verificare che la curva sperimentale della funzione di trasferimento assume il valore massimo per valori di frequenza interni alla banda passante [f_1 ; f_2] e si avvicini a zero per frequenze esterne.

¹ $H_{max} < 1$ a causa della resistenza parassita dell'induttore (R_L): $H(\omega) = \frac{R}{R+R_L+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})} \rightarrow H_{max} = \frac{R}{R+R_L} < 1$ per $\omega = \omega_0$

APPENDICE

Numeri complessi

Nella rappresentazione cartesiana un numero complesso z può essere espresso nella formula:

$$z = a + j b$$

dove $a = |z|\cos(\phi)$ è la sua parte reale, $b = |z|\sin(\phi)$ è la sua parte immaginaria e j è l'unità immaginaria $\rightarrow j^2 = -1$

Il modulo del numero complesso è $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

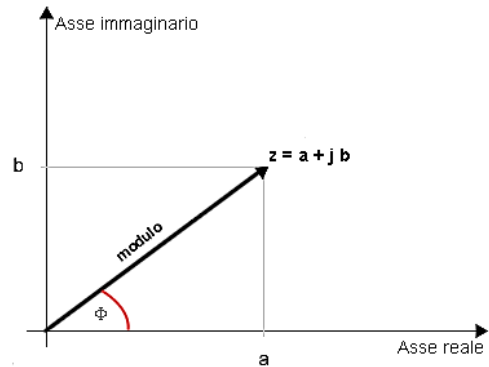
La sua fase (argomento) è $\phi = \tan^{-1}(b/a)$

Mediante l'identità di Eulero:

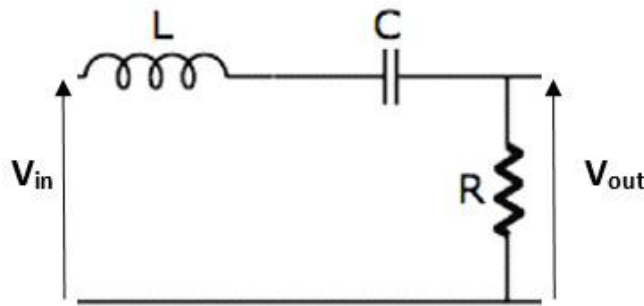
$$e^{j\Phi} = \cos(\Phi) + j \sin(\Phi)$$

un numero complesso può anche essere scritto in forma esponenziale:

$$z = |z|(\cos\phi + j\sin\phi) = |z|e^{j\Phi}$$



Analisi del circuito RLC mediante i numeri complessi (fasori)



La tensione sinusoidale di ingresso fornita dal generatore $V_{in} = V_0 \sin(\omega t)$ può essere scritta mediante il numero complesso (fasore):

$$V_{in} = V_0 e^{j\omega t}$$

La corrente sinusoidale che passa nel circuito $i = i_0 \sin(\omega t + \phi)$ può essere scritta mediante il numero complesso (fasore):

$$i = i_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

La seconda legge di Kirchhoff per il circuito RLC è espressa dall'equazione:

$$V_{in} = V_R + V_L + V_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo e ricordando la relazione $i = \frac{dQ}{dt}$ si ottiene l'equazione:

$$\frac{dV_{in}}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i$$

Sostituendo i fasori $V_{in} = V_0 e^{j\omega t}$ $i = i_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ nell'equazione suddetta si ottiene:

$$j\omega V_{in} = Rj\omega i - \omega^2 L i + \frac{1}{C} i$$

$$\rightarrow V_{in} = \left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right] i$$

Ricordando la legge di Ohm generalizzata che lega tensione e corrente:

$$V_{in} = Z i = (Z_R + Z_L + Z_C) i$$

si possono ricavare i valori delle impedenze e delle reattanze:

$$Z_R = R \text{ (impedenza di una resistenza R)}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \text{ (reattanza capacitiva di una capacità C)}$$

$$Z_L = j\omega L \text{ (reattanza induttiva di un'induttanza L)}$$