

Coordinate cromatiche e temperatura colore

Scopo dell'esperimento

Determinare le coordinate cromatiche, la temperatura colore e la lunghezza d'onda di massima emissione di sorgenti luminose di uso comune tramite la legge di Wien.

Materiali e strumenti

- Spettrometro Spectra-1 della Kvant (range 360-940 nm, risoluzione < 2nm) con cavo flessibile in fibra ottica per ricevere il segnale luminoso.



Fig. 1 Spettrometro a riflessione

- Lampade a basso consumo aventi differenti temperature colore (2700 K, 4200 K, 6500 K)
- Software di acquisizione SPLICCO della Ocean Optics.
- Software *Mathematica*

Richiamo teorico

Generalità sugli spettrometri

Gli elementi fondamentali di uno spettrometro sono cinque: la *fenditura d'ingresso (entrance slit)*, l'*ottica di collimazione (collimating mirror)*, l'*elemento dispersivo (reflection grating)* che può essere un prisma o un reticolo, lo *specchio focalizzatore (focusing mirror)* e l'*ottica di osservazione dell'immagine (imaging sensor)*. La fenditura assolve l'importante funzione di costituire l'apertura di entrata dello spettrometro e di garantire l'omogeneità della radiazione che arriva al mezzo di dispersione (prisma o reticolo) per mezzo del collimatore. L'ottica di collimazione ha la funzione di rendere parallelo il fascio ottico che arriva al reticolo, ed è costituita da un cannocchiale rovesciato con l'obiettivo rivolto verso il reticolo e con la fenditura alloggiata sul focalizzatore. L'elemento dispersivo o diffrattivo (un prisma o un sistema di prismi oppure un reticolo a trasmissione/riflessione) costituisce il cuore dello spettrometro, ossia il componente che effettua la dispersione della luce nelle sue varie lunghezze d'onda. L'ottica di osservazione dell'immagine ha la funzione di ingrandire il fascio parallelo diffratto proveniente dal reticolo, ed osservarlo tramite un oculare o riprenderlo con una *camera CCD* o una *webcam*.

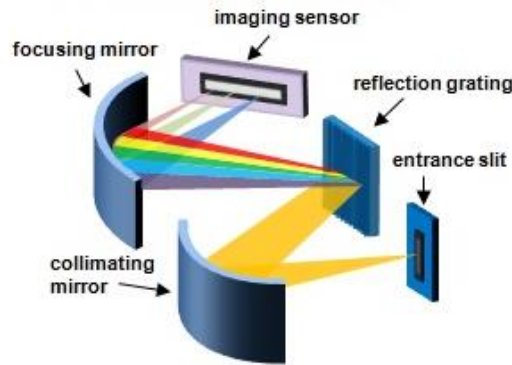


Fig. 2 Rappresentazione schematica di uno spettrometro

Spettrometri a prisma

La luce solitamente è bianca e va quindi dispersa in tutte le sue componenti monocromatiche, dal violetto al rosso. Il modo più economico per ottenerne la dispersione è quello di usare un prisma, sfruttando il principio della rifrazione, in base al quale quando la luce passa attraverso un prisma le lunghezze d'onda più lunghe (parte rossa dello spettro) subiscono una deviazione minore rispetto a quelle più corte (blu-violetto). Dal punto di vista sperimentale il prisma ha il vantaggio di concentrare della luce diffratta su un solo ordine con un guadagno di luminosità ed efficienza che può raggiungere anche il 100%, ma ha una dispersione spettrale piuttosto limitata, come si può osservare nella seguente figura dove uno spettro ottenuto con un prisma di vetro flint (a sinistra) è messo a confronto con quello con un reticolo di diffrazione a trasmissione da 300 linee/mm (a destra). Inoltre, problema ancora più grave, la dispersione di un prisma è non lineare quindi lo spettro blu-violetto avrà un'estensione maggiore di quello rosso.

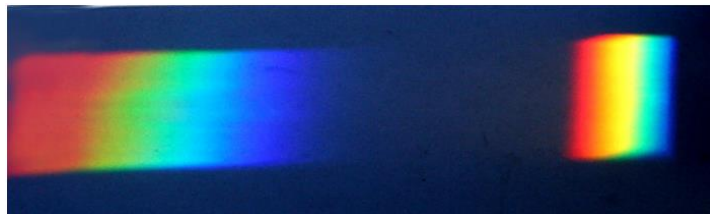


Fig. 3 Spettri di diffrazione ottenuti con un prisma (a sinistra) e con un reticolo (a destra).

Gli spettroscopi a prisma furono usati nel secolo scorso, prima dell'avvento del reticolo di diffrazione ideato da *Norbert* e perfezionato dall'americano *Rowland*. Furono spesso usati strumenti con una serie di prismi in cascata, anche 6-8, allo scopo di aumentare la dispersione spettrale, piuttosto limitata con un solo prisma. Oggigiorno quasi tutti gli strumenti professionali sono dotati di spettroscopi a reticolo di diffrazione, ad eccezione di alcuni (come ad esempio gli *Echelle*) che funzionano con un reticolo ed un prisma.

Spettrometri a reticolo

Un **reticolo di diffrazione** è una lastra su cui sono praticate numerose incisioni molto sottili e equispaziate, che si comportano come un insieme di fenditure aventi una distanza reciproca (d) costante, che si chiama *passo reticolare*.

Quando il reticolo è illuminato da una luce monocromatica di lunghezza d'onda λ , esso produce sullo schermo una figura di diffrazione, con frange luminose chiare dovute all'interferenza costruttiva dei raggi che escono dalle fenditure. Come mostrato nella figura sottostante, il massimo del primo ordine ($n = 1$) si forma per un angolo θ tale che la differenza di cammino tra i raggi che provengono da due fenditure successive sia $d \cdot \sin\theta = \lambda$: in questo modo sono in fase i raggi che escono da tutte le fenditure, perché la differenza di cammino è sempre un multiplo di λ .

Il massimo del secondo ordine ($n = 2$) si ottiene invece per quei raggi che escono da due fenditure successive con un'inclinazione θ tale che $d \cdot \sin\theta = 2 \lambda$. In generale i massimi di intensità luminosa si hanno per angoli di diffrazione θ che soddisfano la relazione:

$$d \cdot \sin\theta = n \lambda \quad (\text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

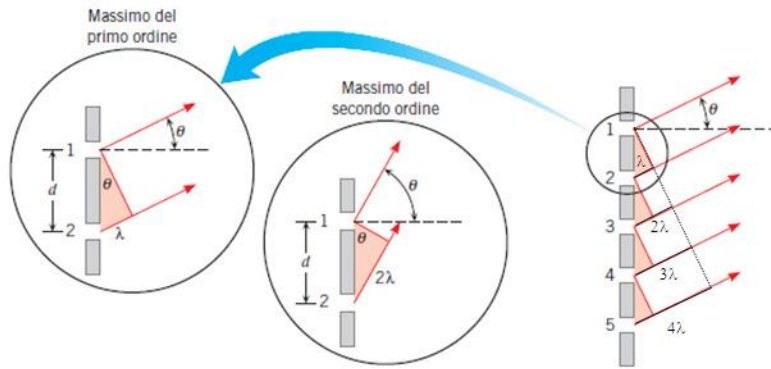


Fig. 4 Rappresentazione schematica della diffrazione su un reticolo.

Se il reticolo di diffrazione è illuminato da una radiazione non monocromatica (per esempio la luce solare o la luce bianca di una normale lampadina), i diversi colori da cui è composta la luce incidente, avendo lunghezze d'onda diversa, hanno i massimi ad angoli diversi. Il reticolo quindi separa e disperde i colori, come un prisma (figura sotto). Il massimo centrale (ordine $n = 0$) è bianco perché i colori si sovrappongono.

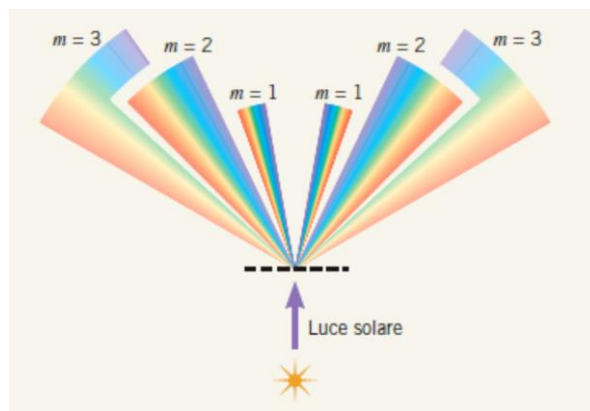


Fig. 5 Diffrazione di luce bianca su un reticolo.

L'ordine $n = 1$ è quello nel quale il fascio diffratto presenta la maggiore energia relativa, mentre negli ordini successivi l'intensità man mano decresce. Il primo ordine è la parte di spettro più luminosa, dove l'energia è maggiore ma anche dove la dispersione è minore rispetto agli ordini superiori, nei quali gli spettri sono più estesi. Nei reticoli con un numero medio basso di linee/mm si verifica il fenomeno della sovrapposizione degli ordini. In sintesi, accade che la parte rossa dell'ordine 1 si viene a sovrapporre parzialmente a quella del violetto dell'ordine 2, lo spettro rosso dell'ordine 2 viene a sovrapporsi a quello blu dell'ordine 3 e così via, rendendo quindi più confusa l'immagine spettrale. A tale problema si ovvia, in genere, con l'uso di filtri che isolano la lunghezza d'onda che si desidera osservare, ovvero con l'uso di reticoli con un elevato numero di linee/mm (superiore a 1200) in modo da distanziare tra loro gli spettri dei vari ordini e ridurre il problema. I reticoli oggi più usati per gli strumenti professionali sono tuttavia quelli a riflessione, e ciò soprattutto perché nei reticoli a trasmissione il processo di concentrazione della luce in un certo ordine (blazing) risulta più difficile, più costoso e meno efficiente. Nei reticoli commerciali a trasmissione in acetato la maggior parte dell'energia luminosa (circa il 60%) è convogliata verso l'ordine zero; inoltre, e questo è l'aspetto fondamentale, i reticoli a trasmissione mantengono la loro efficienza solo per un ridotto numero di linee per mm. Nei reticoli a riflessione risulta invece molto più facile, effettuando le incisioni sul reticolo secondo un certo angolo, detto angolo di blaze, convogliare il massimo dell'energia luminosa, sino anche al 90% su un solo ordine (non necessariamente il primo), e al suo interno in una data lunghezza d'onda, con ovvie conseguenze positive sul flusso di intensità e sull'incisione dell'immagine spettrale. Si dirà quindi che il reticolo X è blazed per 500 nm nell'ordine 1, quando la maggior parte dell'energia luminosa verrà diffratta principalmente verso la zona blu-verde dello spettro di ordine 1. Inoltre i reticoli a riflessione consentono alti numeri di linee per mm (sino a 1800 per i ruled e 2400 gli olografici).

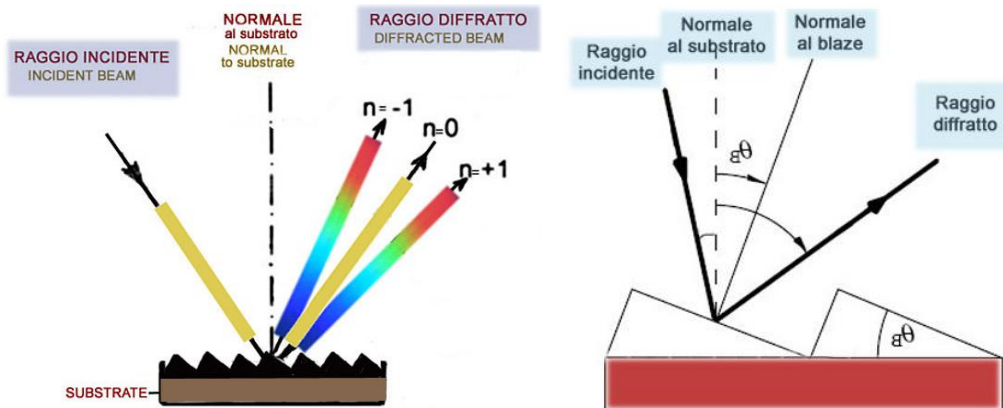


Fig. 6 Reticoli di diffrazione in riflessione con incisioni inclinate per realizzare il processo di blazing

Nel reticolo a trasmissione la luce passa attraverso un substrato in vetro ottico e viene poi diffratta nei vari ordini spettrali. Come già detto, i reticoli di diffrazione a trasmissione richiedono una densità di linee per mm relativamente bassa per mantenere intatta la loro efficienza, soprattutto alle lunghezze d'onda elevate. Nel seguente grafico sono mostrati le differenti prestazioni di alcuni reticoli a trasmissione: si può notare che all'aumentare del numero di righe per mm, l'efficienza diminuisce ed il picco di trasmissione si sposta verso lunghezze d'onda minori.

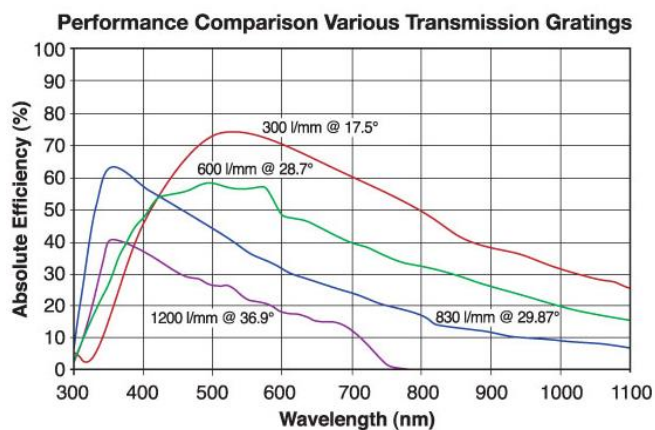


Fig. 7 Efficienza luminosa di diversi reticoli a trasmissione

In sintesi i parametri fondamentali di un reticolo sono:

- **Gli ordini di diffrazione** ovvero il numero di raggi diffratti dopo la trasmissione o riflessione, che si trovano a destra e a sinistra del raggio trasmesso o riflesso (ordine 0). I reticoli a basso numero di righe per mm possono generare un notevole numero di ordini. Gli ordini di numero più elevato offrono una dispersione spettrale maggiore.
- **La dispersione spettrale** che è data dalla variazione dell'angolo di diffrazione per la variazione della lunghezza d'onda, e che misura la separazione angolare tra i raggi di lunghezze d'onda adiacenti. Essa aumenta con l'aumentare del numero di linee per mm del reticolo e con l'aumentare dell'ordine spettrale. Essa si misura in Angstrom per mm o, nel caso di *camere ccd*, in pixel del sensore.
- **L'ampiezza spettrale libera** (vedi figura seguente) considerata come il maggiore intervallo di lunghezza d'onda di un dato ordine che non si sovrappone al medesimo intervallo di un ordine adiacente. Esso aumenta con l'aumentare delle righe per mm dei reticoli e diminuisce con l'aumentare del numero dell'ordine.

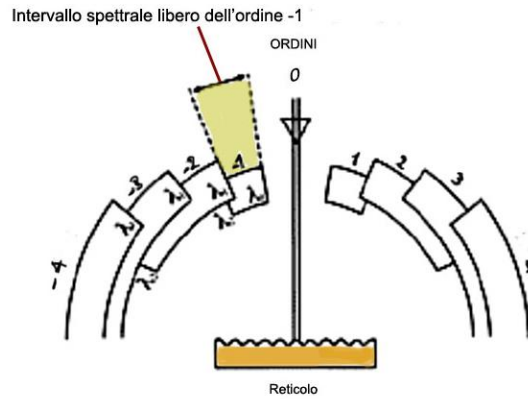


Fig. 8 Rappresentazione schematica dell'ampiezza spettrale libera di un reticolo

- **Il potere risolutivo** $R = \lambda/\Delta\lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda e $\Delta\lambda$ è la minima separazione osservabile tra due righe spettrali. Esso è funzione dell'ordine e del numero totale N delle righe estese a tutta la superficie del reticolo (in pratica il numero di linee per mm moltiplicato per la dimensione del reticolo). Il potere risolutivo è espresso dalla relazione:

$$R = n N$$

dove n = ordine di diffrazione e N = numero totale di fenditure.

Coordinate cromatiche e temperatura colore

Il grande vantaggio dei sistemi di specificazione del colore mediante coordinate numeriche è quello di poter effettuare una valutazione oggettiva effettuando delle misure con strumenti come lo spettrometro. La sensibilità dell'occhio ai tre colori primari della luce (rosso, verde e blu) è definita da precise distribuzioni di intensità spettrale in funzione della lunghezza d'onda: le *funzioni di color matching* X , Y e Z (vedi figura seguente). Queste tre funzioni sono state derivate normalizzando espressioni individuate negli anni '20 da Wright e Guild; sovrapponendo queste tre distribuzioni si può riprodurre qualunque colore percepibile dall'occhio umano.

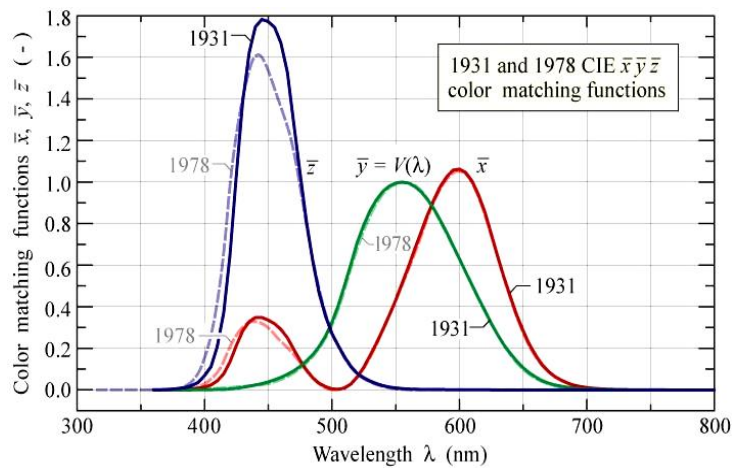


Fig. 9 Funzioni di color matching

Vediamo ora come a partire dalla semplice misurazione dello spettro di emissione di una sorgente per mezzo di uno spettrometro, sia possibile ricavare le sue coordinate cromatiche. Prendiamo come esempio lo spettro di una sorgente acquisito mediante lo spettrometro che misura l'intensità luminosa in funzione della lunghezza d'onda (vedi figura seguente).

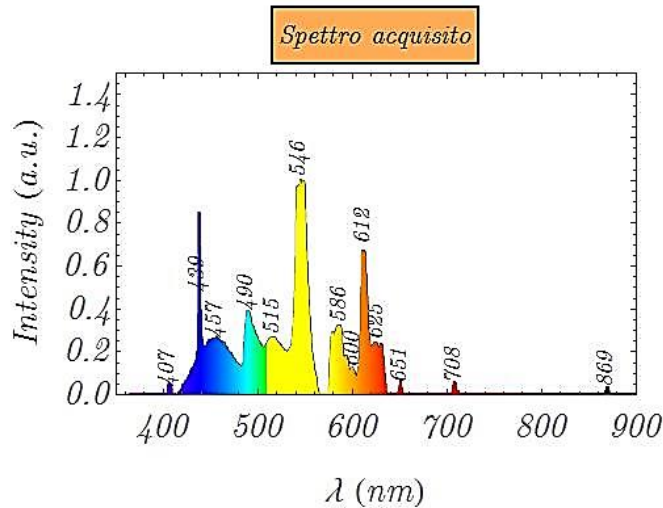


Fig. 10 Spettro di una sorgente acquisito con lo spettrometro

Questa distribuzione spettrale della radiazione elettromagnetica emessa dalla sorgente può essere associata ad una funzione $F(\lambda)$ che definisce l'intensità per ogni lunghezza d'onda. Il prodotto della funzione $F(\lambda)$ con ognuna delle tre funzioni di color matching che descrivono la risposta del nostro occhio al rosso $X(\lambda)$, al verde $Y(\lambda)$ e al blu $Z(\lambda)$ dà origine alle funzioni di stimolo dell'occhio ai tre colori in funzione della lunghezza d'onda $FR(\lambda)$, $FG(\lambda)$, $FB(\lambda)$ mostrate nella figura seguente.

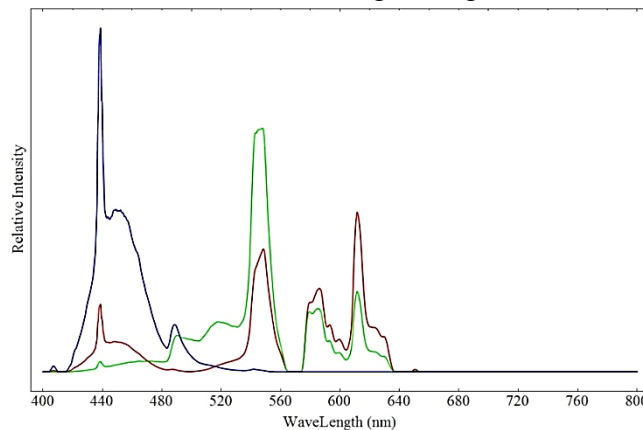


Fig. 11 Le funzioni di stimolo dell'occhio ai tre colori in funzione della lunghezza d'onda

In sostanza l'occhio percepisce il colore di tale sorgente sovrapponendo le intensità, alle relative lunghezze d'onda, descritte dalle tre funzioni di stimolo e riferite alle tre sorgenti primarie rosso, verde e blu. La legge di Grassmann infatti afferma che una luce percepita come avente un certo colore (es. giallo) può effettivamente corrispondere a una luce monocromatica emessa a quella lunghezza d'onda o a una sovrapposizione con opportune intensità di emissioni a diverse lunghezze d'onda (linearità di risposta dell'occhio umano).

Le **coordinate cromatiche** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ si ottengono integrando su tutto il range delle lunghezze d'onda visibili (da 380 nm a 800 nm) le funzioni di stimolo:

$$FR(\lambda) = F(\lambda) \cdot X(\lambda) ; FG(\lambda) = F(\lambda) \cdot Y(\lambda) ; FB(\lambda) = F(\lambda) \cdot Z(\lambda)$$

e normalizzando poi ad 1:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \int_{380 \text{ nm}}^{800 \text{ nm}} F(\lambda) \cdot X(\lambda) \cdot d\lambda \sim \sum_{k=380}^{800} F(k) \cdot X(k) \\ \bar{Y} &= \int_{380 \text{ nm}}^{800 \text{ nm}} F(\lambda) \cdot Y(\lambda) \cdot d\lambda \sim \sum_{k=380}^{800} F(k) \cdot Y(k) \\ \bar{Z} &= \int_{380 \text{ nm}}^{800 \text{ nm}} F(\lambda) \cdot Z(\lambda) \cdot d\lambda \sim \sum_{k=380}^{800} F(k) \cdot Z(k) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}} \\ \bar{y} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}} \\ \bar{z} = \frac{\bar{Z}}{\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}} \end{cases}$$

Queste sono le coordinate cromatiche che descrivono il colore percepito dal nostro occhio mentre sta osservando una sorgente avente spettro di emissione come quello precedente.

Cerchiamo ora di risalire alla **temperatura colore** dalle coordinate cromatiche di una sorgente: quando si dice che una lampada ha una temperatura di colore di 3000 K, significa che la luce da essa prodotta ha la stessa tonalità di quella generata da un corpo nero avente la stessa temperatura. È importante che una sorgente artificiale si avvicini il più possibile al comportamento energetico del corpo nero poiché significa che essa emette luce paragonabile a quella naturale del sole (anch'esso approssimabile al corpo nero). Dalla legge di Wien sappiamo che la curva di emissione di un corpo nero $F_{CN}[\lambda, T]$ è funzione della lunghezza d'onda, quindi per ogni data temperatura la curva di emissione del corpo nero è una funzione della sola lunghezza d'onda.

Di conseguenza le tre coordinate cromatiche del corpo nero ($\bar{x}_{CN}, \bar{y}_{CN}, \bar{z}_{CN}$) sono funzioni della sola temperatura e vengono definite dalle relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_{CN}[T] &\sim \sum_{k=380}^{800} F_{CN}[k, T] \cdot X(k) \\ \bar{Y}_{CN}[T] &\sim \sum_{k=380}^{800} F_{CN}[k, T] \cdot Y(k) \\ \bar{Z}_{CN}[T] &\sim \sum_{k=380}^{800} F_{CN}[k, T] \cdot Z(k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{CN}[T] = \frac{\bar{X}_{CN}[T]}{\bar{X}_{CN}[T] + \bar{Y}_{CN}[T] + \bar{Z}_{CN}[T]} \\ \bar{y}_{CN}[T] = \frac{\bar{Y}_{CN}[T]}{\bar{X}_{CN}[T] + \bar{Y}_{CN}[T] + \bar{Z}_{CN}[T]} \\ \bar{z}_{CN}[T] = \frac{\bar{Z}_{CN}[T]}{\bar{X}_{CN}[T] + \bar{Y}_{CN}[T] + \bar{Z}_{CN}[T]} \end{cases}$$

La figura seguente mostra le tre coordinate cromatiche del corpo nero in funzione della temperatura, che rappresentano la percezione del nostro occhio quando viene stimolato dalla radiazione emessa da un corpo nero.

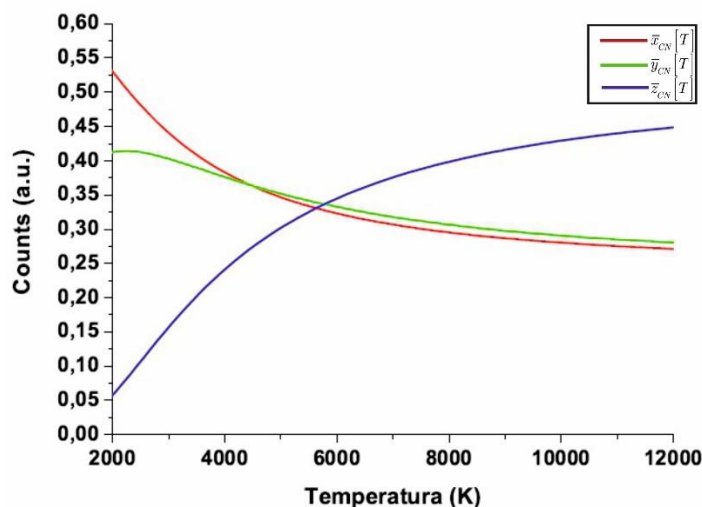


Fig. 12 Coordinate cromatiche del corpo nero in funzione della temperatura

Queste funzioni possono essere usate per costruire una curva delle coordinate cromatiche del corpo nero alle diverse temperature (vedi figura seguente), utile per fare un confronto con le coordinate della sorgente e stabilire quindi la sua temperatura colore.

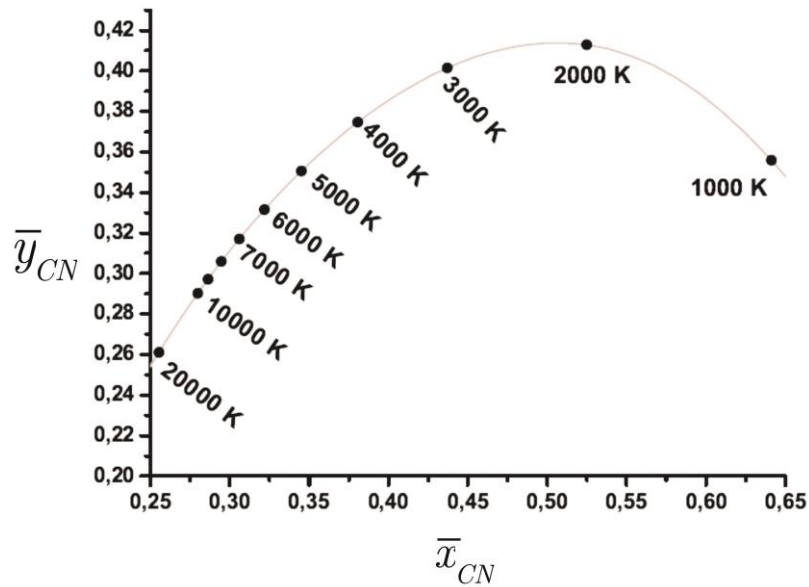


Fig. 13 Curva delle coordinate cromatiche del corpo nero in funzione della temperatura

Quindi nel diagramma delle coordinate cromatiche lo spettro della sorgente sarà rappresentato da un punto, mentre quello emesso dal corpo nero da una curva funzione della sua temperatura (vedi figura seguente).

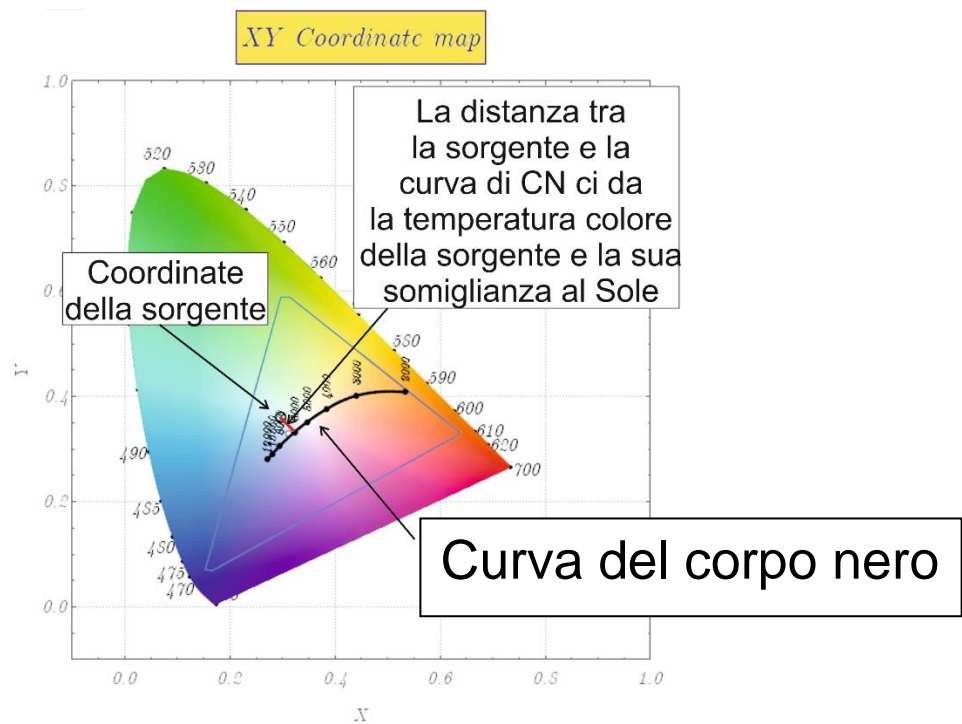


Fig. 14 Coordinate cromatiche della sorgente e curva di corpo nero rappresentate nello spazio dei colori visibili

Da questo diagramma si possono determinare:

- la temperatura colore della sorgente, che sarà la temperatura del punto della curva di corpo nero avente la minima distanza dal punto delle coordinate cromatiche della sorgente
- la sua vicinanza all'emissione di corpo nero (cioè la sua somiglianza con la luce naturale emessa dal Sole), che è rappresentata dalla distanza tra i due punti.

In fisica la legge di Wien, detta anche legge dello spostamento di Wien è una relazione fisica sperimentale, scritta dal fisico tedesco Wilhelm Wien nel 1893, che consente di individuare per quale lunghezza d'onda λ_{\max} è massima l'emissione radiativa di un corpo nero di massa generica posto a una certa temperatura T. La relazione è:

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{cost} = 2.90 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot \text{K} \text{ (legge di Wien)}$$

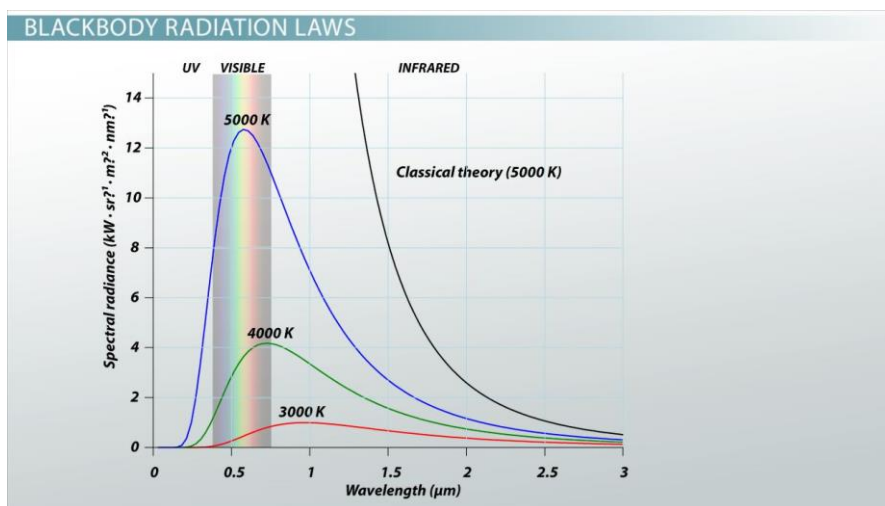


Fig. 15 Radiazione di corpo nero

Esecuzione dell'esperimento e analisi dati

- Dopo aver verificato il collegamento USB tra lo spettrometro e il PC, una sorgente luminosa sul suo portalampada, accenderla e aspettare 10 minuti, affinché il gas contenuto nella lampada raggiunga la sua temperatura di equilibrio.
- Fissare la testa della fibra ottica dello spettrometro come mostrato nella figura seguente, in modo da essere ad una distanza di 2/3 cm dalla sorgente luminosa.



Fig. 16 Configurazione sperimentale della fibra ottica e della lampada

- Avviare il software di acquisizione (SPLICCO), la cui icona si trova sul desktop del PC. L'acquisizione dello spettro avviene premendo il pulsante *Start* come mostrato nella figura seguente. Sull'asse x sono riportate le lunghezze d'onda in nm (cioè 10^{-9} m), mentre nell'asse y viene riportata l'intensità relativa, che va da zero al valore di saturazione della *CCD* dello spettrometro, inteso come 100. Regolare i fattori *Integration Time* a 200 millisecondi e *Average Scans* a 50, in modo da ottenere una immagine stabile dello spettro. Una volta acquisito, lo spettro va esportato in formato testo, andando sul *menu File* → *Export* (in alto a sinistra della finestra del software). Infine salvare lo spettro acquisito con un nome che richiami, in qualche modo, il tipo di sorgente misurata.

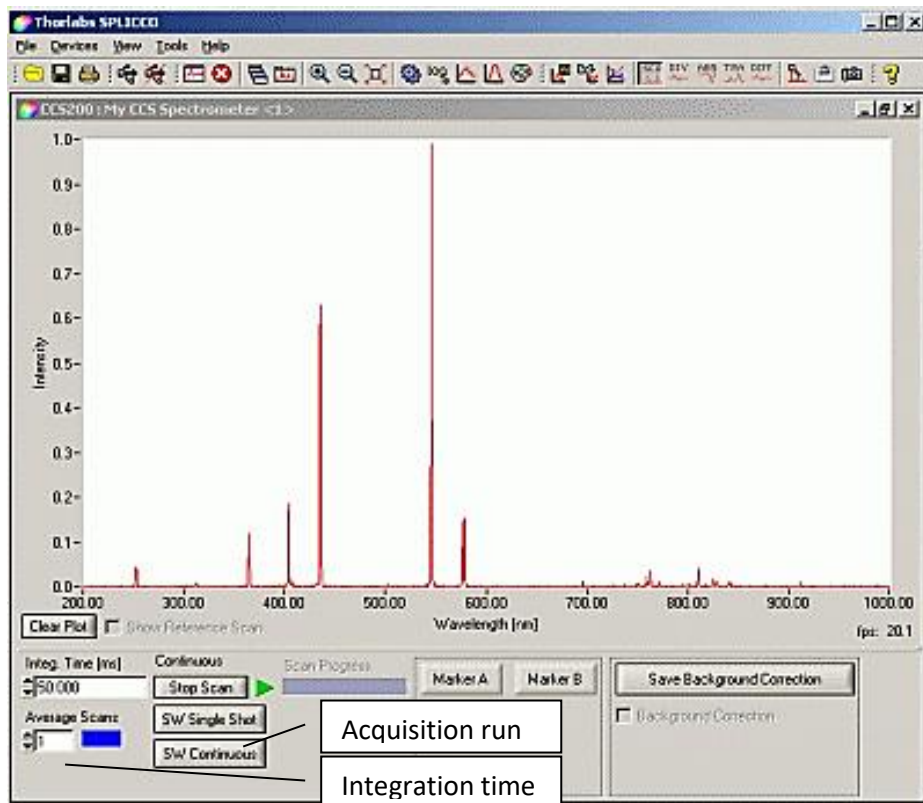


Fig-1 Average scans of software SPLICCO

Una volta acquisito lo spettro e salvato il file, è possibile determinare le coordinate cromatiche e la temperatura di colore della sorgente. Il calcolo è abbastanza lungo e complesso, per questo motivo si è deciso di scrivere un apposito *codice* in ambiente *Mathematica*.

- Aprire il programma in *Mathematica* denominato *PLS.nb*, modificare la seconda riga del programma, scrivendo il corretto *path\nome* (ricordare di mettere anche l'estensione) del file che si vuole analizzare. Ricordare che in ambiente *Mathematica* il simbolo / va sostituito col simbolo \, dato che per il programma il simbolo / rappresenta l'operazione di divisione.

```
(*Importazione di dati sperimentali e trasformazione in dati numerici*)
rawdata = Import["E:\\prova3.csv"];
dat =
  Table[{ToExpression[rawdata[[k]][[1]]], TukeyWindow[(ToExpression[rawdata[[k]][[1]]] - 600) / 500, 0.15] *
    ToExpression[rawdata[[k]][[2]]]}, {k, Length[rawdata]}];

att[x_] := Piecewise[{{0, x < 380}, {0.3 + 0.7 * (x - 380) / (440 - 380), 380 <= x <= 440}, {1, 440 < x <= 645},
  {0.3 + 0.7 * (750 - x) / (750 - 645), 645 < x <= 750}, {0, x > 745}}];
RGB[x_] := Piecewise[{{0, 0, 255}, x < 380},
  {{255 * Round[(((440 - x) / (440 - 380)) * att[x])^0.8], 0, 255 * Round[att[x]^0.8]}, 380 <= x <= 440},
  {{0, 255 * Round[((x - 440) / (490 - 440))^0.8], 255}, 440 < x <= 490},
  {{0, 255 * Round[((510 - x) / (510 - 490))^0.8], 255}, 490 < x <= 510},
  {{255 * Round[((x - 510) / (580 - 510))^0.8], 255, 0}, 510 < x <= 580},
  {{255 * Round[255 * ((645 - x) / (645 - 580))^0.8], 0}, 580 < x <= 645},
  {{255 * Round[att[x]^0.8], 0, 0}, 654 < x <= 750},
  {{255, 0, 0}, x > 750}}];
```

Fig. 18 Programma *PLS.nb* scritto in *Mathematica*

Prima di iniziare con la procedura di calcolo, è importante fare un'osservazione: come già detto ogni spettrometro ha una sua efficienza caratteristica, cioè una diversa risposta alle frequenze della luce misurata, che dipende dal reticolo utilizzato e dalle caratteristiche della *CCD*. Lo spettrometro Spectra-1 della Kvant utilizzato presenta la curva di efficienza mostrata nella figura seguente.

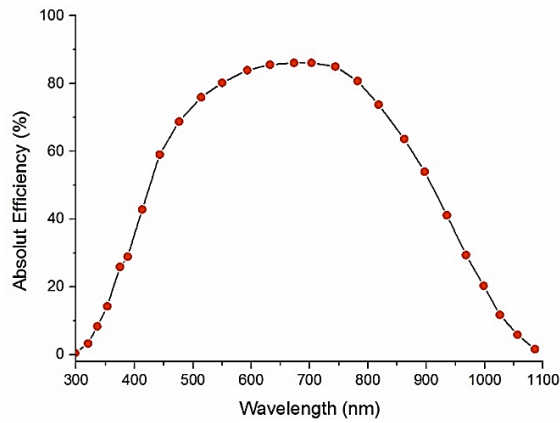
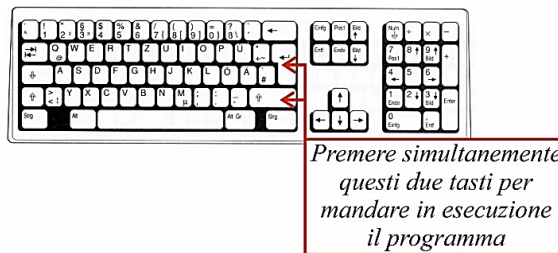


Fig. 19 Curva di efficienza dello spettrometro Spectra-1 della Kvant

- Mandare in esecuzione il programma posizionando il cursore alla fine del programma, in modo che il software esegua tutta la sequenza delle istruzioni, e premendo simultaneamente sulla tastiera i due tasti *Shift + Invio*.



L'output del programma fornisce tutti i dati richiesti sulle coordinate cromatiche e sulla temperatura colore, attraverso il riquadro in basso a destra. Gli altri tre riquadri mostrano rispettivamente lo spettro acquisito dallo spettrometro (in alto a sinistra), quello reale corretto per l'efficienza (in alto a destra). In basso a sinistra, invece, viene riportato il piano delle coordinate cromatiche, con la curva dello spettro del corpo nero in funzione della temperatura.

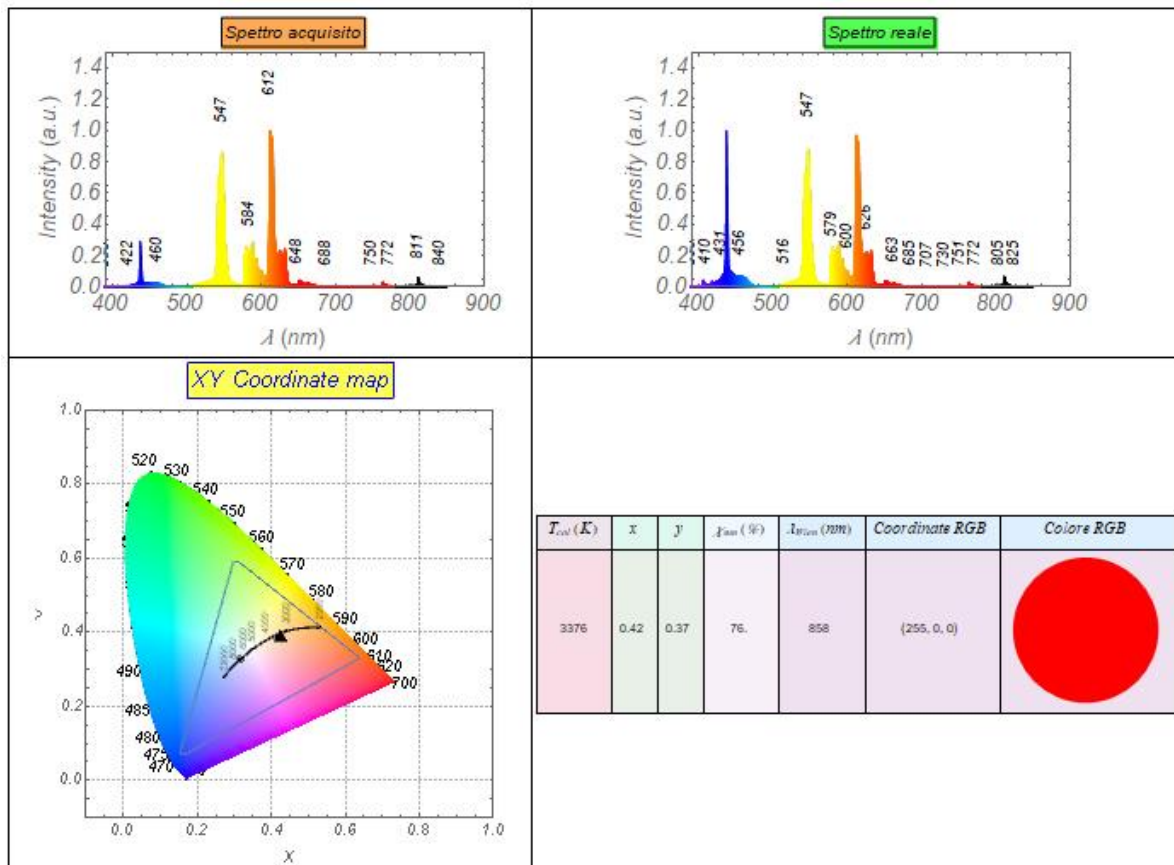


Fig. 20 Analisi delle coordinate cromatiche e della temperatura colore effettuata col software *Mathematica*

Conclusioni

- Confrontare il valore ottenuto per la temperatura colore con quello riportato dal costruttore della sorgente luminosa.
- Determinare se la sorgente esalta i toni blu (colore freddo) o quelli caldi (colore caldo), verificandone la posizione sul diagramma dei colori.
- Determinarne infine la distanza, in termini di coordinate cromatiche, con la sorgente di corpo nero.
- Ripetere la misura per tutte le sorgenti a disposizione e determinare quale di esse abbia la temperatura di colore maggiore, determinarne le corrispondenti coordinate RGB e annotarle nel report dell'esperimento.